

Traducción del Ruso al inglés

Original Title: “Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей”

Autor: Н. М. Коробов

Publicado: Известия АН СССР. Серия математическая, 15:1 (1951), 17–46.

Traducido por: Verónica Becher and Belén Loleo Saigos

Fecha: Buenos Aires, January 16, 2026.

1. Acerca de N. M. Korobov

Nikolai M. Korobov (1917–2004) fue un matemático soviético que trabajó en teoría de números, aproximación diofántica y distribución uniforme de secuencias. Sus contribuciones en métodos analíticos y combinatorios tuvieron un fuerte impacto en matemática discretas y teoría de la computación. Una parte importante de su producción nunca fue traducida al inglés.

Wikipedia tiene una página dedicada a Nikolai M. Korobov

https://en.wikipedia.org/wiki/Nikolay_Korobov.

A su vez, todos sus trabajos están publicados en el sitio web *All Russian Portal*:

https://www.mathnet.ru/php/person.phtml?&personid=17309&option_lang=eng.

2. Acerca de su trabajo sobre secuencias equidistribuidas

Nikolai Korobov publicó varios artículos sobre la teoría de secuencias uniformemente distribuidas, que no han sido traducidos al inglés. En siete de estos trabajos, publicados entre 1950 y 1956, se dedica a una clase particular de secuencias uniformemente distribuidas, que son de la forma αq^n con α un número real y n un entero mayor o igual que 1. Los números α para los cuales la secuencia αq^n está uniformemente distribuida son exactamente los llamados números normales.

Estos son los siete trabajos publicados entre 1950 y 1956, que están solamente disponibles en ruso. Proporcionamos aquí la traducción de la referencia bibliográfica:

1950 Н. М. Коробов, “О некоторых вопросах равномерного распределения”, *Известия АН СССР. Серия математическая*, 14:3 (1950), 215–238.

Referencia traducida al inglés: N. M. Korobov, “Concerning Some Questions of Uniform Distribution”, *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical Series*, 14:3 (1950), 215–238.

1951 Н. М. Коробов, “Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей”, *Известия АН СССР. Серия математическая*, 15:1 (1951), 17–46.

Referencia traducida al inglés: N. M. Korobov, “Normal Periodic Systems and Their Applications to the Estimation of Sums of Fractional Parts”, *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical Series*, 15:1 (1951), 17–46.

Este es el trabajo que traducimos en esta tesis.

1951 Н. М. Коробов, “Дробные доли показательных функций”, *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*, 38 (1951), 87–96.

Referencia traducida al inglés: N. M. Korobov, “Fractional Parts of Exponential Functions”, *Proceedings of the V. A. Steklov Mathematical Institute*, 38 (1951), 87–96.

1952 Н. М. Коробов, “О нормальных периодических системах”, *Известия АН СССР. Серия математическая*, 16:3 (1952), 211–216. Referencia traducida al inglés: N. M. Korobov, “On Normal Periodic Systems”, *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical Series*, 16:3 (1952), 211–216.

1953 Н. М. Коробов, “Многомерные задачи распределения дробных долей”, *Известия АН СССР. Серия математическая*, 17:5 (1953), 389–400.

Referencia traducida al inglés: N. M. Korobov, “Multidimensional Problems of the Distribution of Fractional Parts”, *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical Series*, 17:5 (1953), 389–400.

1955 Н. М. Коробов, “Числа с ограниченным отношением и их приложения к вопросам диофантовых приближений”, *Известия АН СССР. Серия математическая*, 19:5 (1955), 361–380.

Referencia traducida al inglés: N. M. Korobov, “Numbers with Bounded Ratio and Their Applications to Problems of Diophantine Approximation”, *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical Series*, 19:5 (1955), 361–380.

1956 Н. М. Коробов, “О вполне равномерном распределении и совместно нормальных числах”, *Известия АН СССР. Серия математическая*, 20:5 (1956), 649–660.

Referencia traducida al inglés: N. M. Korobov, “On Completely Uniform Distribution and Jointly Normal Numbers”, *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical Series*, 20:5 (1956), 649–660.

3. Acerca del artículo traducido

En esta tesis presentamos la *primera traducción al inglés* del trabajo más extenso de los listados anteriormente:

“Normal periodic systems and their applications to the estimation of sums of fractional parts” (1951).

En este trabajo, Korobov desarrolla dos capítulos.

3.1. Capítulo I: Sistemas periódicos normales

En primer lugar, define los sistemas periódicos normales $\rho_n(q)$, que son secuencias de $q^n + n - 1$ dígitos entre 0 y $q - 1$, donde cada bloque de n dígitos aparece exactamente una vez. Estos sistemas periódicos normales $\rho_n(q)$ son exactamente las secuencias de Bruijn (no circulares) de orden n en un alfabeto de q símbolos. Korobov explícitamente nombra esta equivalencia y cita el trabajo “*A combinatorial problem*” de Nicolaas Govert de Bruijn del año 1946 en la Sección 3 del Capítulo 1.

En segundo lugar, propone métodos para generar estos sistemas. Primero da un método goloso para construir un sistema periódico normal de orden n para un q arbitrario. Luego, propone un método general de construcción de todos los sistemas periódicos normales para todo orden n y todo entero $q \geq 2$. Aunque Korobov no lo dice explícitamente, su método es análogo al método de generar las secuencias de Bruijn de orden n a partir de un árbol generador en el grafo de Bruijn de orden $n - 1$, que resulta ser el actualmente más conocido.

3.2. Capítulo II: Aplicaciones a sumas de partes fraccionarias

Motivado por el estudio de la suma de las partes fraccionarias de funciones lineales αx , investigadas por Khinchin, Ostrovskii, Hardy y Littlewood, Korobov se dedica al problema de la estimación de las sumas de las partes fraccionarias de las funciones de la forma αq^x .

En particular, trabaja sobre el conjunto L de números reales tales que las partes fraccionarias de la función $\alpha q^{\mu x}$ están uniformemente distribuidas para todo número entero $\mu \geq 1$. A partir de este marco, enuncia y demuestra seis teoremas que establecen distintas cotas asintóticas para las sumas

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} \quad \text{y} \quad \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\}, \quad \mu \geq 1.$$

Lo novedoso de este trabajo es que Korobov fue el único en estudiar sistemáticamente las sumas de $\{\alpha q^{\mu x}\}$, y logró vincularlas con métodos combinatorios basados en secuencias de Bruijn. Sus observaciones sobre secuencias de Bruijn coinciden con lo que hoy ya se conoce, pero la aplicación a la construcción de secuencias uniformemente distribuidas de la forma $\{\alpha q^x\}$ es un aporte original.

3.2.1. Suma de las partes fraccionarias de αq^x

Sabiendo que la diferencia entre la sumatoria de las partes fraccionarias de la función αq^x y su valor medio es estrictamente del orden sublineal,

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P),$$

en el Teorema 1 prueba que para todos los $\alpha \in L$ esa cota superior no se puede mejorar. Concretamente, muestra que para cualquier función positiva $\varepsilon(P)$ con $\varepsilon(P) \rightarrow 0$, existe $\alpha \in L$ tal que

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Para demostrar esto Korobov da construcciones de α que alcanzan desviaciones del orden $P\varepsilon(P)$.

En contraste, en el Teorema 2 propone construcciones de α cuya suma de $\{\alpha q^x\}$ está acotada por una función $o(\varphi)$, para φ dada. La función φ debe ser positiva y tender a infinito lentamente. Para las construcciones utiliza los sistemas periódicos normales $\rho_n(q)$. Esto nos dice que podemos generar ciertos α para los cuales la sumatoria de partes fraccionarias de la función αq^x difiere de su valor medio en orden sublineal, aunque no puede ser de orden constante.

3.2.2. Suma de las partes fraccionarias de $\alpha q^{\mu x}$ para todo $\mu \geq 1$

En la última parte del trabajo, Korobov propone comparar el comportamiento conocido de las sumatorias de Weyl, respecto de las sumatorias de $\alpha q^{\mu x}$ con $\mu \geq 1$. Es decir, si para cualquier $m \neq 0$ y para $\mu = 1$ se cumple que $\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^{\mu x}} = o(P)$, entonces también se cumple para todo $\mu \geq 1$.

Por un lado, Korobov se pregunta si el Teorema 2 vale para $\{\alpha q^{\mu x}\}$ para todo $\mu \geq 1$, en vez de $\{\alpha q^x\}$. En el Teorema 3 demuestra que no es cierto, dando una construcción de un α que no cumple con la propiedad para todo μ . Sin embargo, en el Teorema 4 demuestra que existen α para los cuales la propiedad sí se preserva. Estas construcciones, nuevamente, se apoyan en los sistemas periódicos normales $\rho_n(q)$.

Por otro lado, se pregunta si el Teorema 1 vale para $\{\alpha q^{\mu x}\}$ para todo $\mu \geq 1$, en vez de $\{\alpha q^x\}$. está acotada inferiormente por una función $P \cdot \varepsilon(P)$. La pregunta es si esta propiedad se mantiene para las sumatorias con $\mu \geq 1$. Al igual que antes, en el Teorema 5 demuestra que no es cierto, dando una construcción de un α que no cumple con la propiedad para todo μ . A su vez, en el Teorema 6 demuestra que existen α para los cuales la propiedad sí se preserva.

4. Acerca de la traducción

La traducción está hecha de manera *verbatim*, incorporando notas al pie numeradas para:

- Correcciones tipográficas matemáticas.
- Referencias y aclaraciones con nombres actuales o notación actual.
- Referencias cruzadas a una parte del mismo documento.
- Aclaraciones matemáticas.

Las notas al pie propias de Korobov aparecen con un asterisco, tal cual figuran en el trabajo original. Las notas al pie de la traducción figuran numeradas.

Además, se agregó el símbolo de fin de demostración detrás de cada demostración.

5. Agradecimientos

A Alexey Ustinov por habernos señalado con máxima paciencia, uno por uno, los trabajos de Korobov que se refieren a secuencias de Bruijn, es decir a los sistemas periódicos normales, durante el Workshop on Diophantine Approximation, Dynamical Systems and Related Topics Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (TSIMF) China January 28 - February 3, 2024.

A Nikolai Moschevitin por habernos incentivado a traducir este trabajo.

Translation from Russian to English

Original Title: “Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей”

Author: Н. М. Коробов

Published: Известия АН СССР. Серия математическая, 15:1 (1951), 17–46.

Translation by: Verónica Becher and Belén Loleo Saigos

Date: Buenos Aires, January 16, 2026.

N. M. Korobov

**NORMAL PERIODIC SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS TO THE
ESTIMATION OF SUMS OF FRACTIONAL PARTS.**

(Presented by Academician I. M. Vinogradov)

Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical Series, 15:1 (1951), 17–46.

The work studies the structure of normal periodic systems, presents a general method that allows for the construction of each such system, and provides estimates for the sums of fractional parts of the exponential function αq^x .

Chapter I. Systems $\rho_n(q)$

The first two paragraphs of this chapter contain definitions, examples, and the simplest method for constructing normal periodic systems $\rho_n(q)$ (method A_1). In section 3 it is shown that not every existing system $\rho_n(q)$ can be obtained by the method A_1 .

In the fourth and fifth sections, the structure of the systems $\rho_n(q)$ is explored, and a general method (A_2 method) is provided, allowing for the construction of each normal periodic system.

Section 1

Let n and q be integers, where $q \geq 2$. We construct n -digit representations of the numbers $0, 1, 2, \dots, q^n - 1$ in the number system with base q .

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \\ 1 &= 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \\ &\vdots \\ q-1 &= 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ q-1 \\ q &= 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \\ &\vdots \\ q^n - 1 &= q-1 \ q-1 \ \dots \ q-1 \ q-1 \end{aligned} \tag{1}$$

We will call the representation (1) n -digit numbers.

There are eight different three-digit numbers in the number system with base 2:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. \quad (2)$$

Let us consider the sequence consisting of the following ten digits:

$$1000101110.$$

The set of three-digit numbers that can be obtained from the adjacent digits of this sequence,

$$100, 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110,$$

obviously coincides with the set of all possible three-digit numbers (2).

It is easy to verify that in the number system with base 4, the two-digit numbers obtained by considering all pairs of adjacent digits from the seventeen-digit sequence

$$22330010203112132, \quad (3)$$

coincide with the set of all possible two-digit numbers:

$$00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33.$$

We call a normal periodic system or a system $\rho_n(q)$ a sequence of t digits

$$\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n} \cdots \delta_t \quad (4)$$

($t = q^n + n - 1$; δ_v — integers from the interval $0 \leq \delta_v \leq q - 1$), possessing the property that the set of n -digit numbers

$$\delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n} \quad (k = 0, 1, \cdots, q^n - 1),$$

obtained from adjacent digits of the sequence (4), coincides with the set of all possible n -digit numbers (1) in the number system with base q .

The sequences (2) and (3) are obviously examples of the systems $\rho_3(2)$ and $\rho_2(4)$.

The existence of normal periodic systems for any n was proven by Good [6]. Good is also credited with an example of the system $\rho_6(2)$.

Examples of systems $\rho_n(q)$ for small values of n and q ($n < 5, q = 2$) are easily constructed. Finding systems $\rho_5(2)$ is somewhat more difficult. Without knowledge of the general method for constructing systems $\rho_n(q)$, it is very difficult to find examples of $\rho_n(q)$ for $n > 5$, even for $n = 6$ and $q = 2$. Such a method, which also provides a proof of the existence of systems $\rho_n(q)$ different from Good's proof, was obtained in my work [3]. For the case of the binary number system, this method consists of the following:

Method A (for $q = 2$): The first n digits are chosen to be equal to one. Then we assign zero to the right side as long as the resulting new n -digit numbers occur for the first time. We append a one only when appending a zero leads to an already encountered n -digit number. The appending stops when any new digit results in an n -digit number that has already appeared.

Thus, the construction of $\rho_n(2)$ by method A is a recursive process that allows, based on the already selected $k + n - 1$ digits

$$\delta_1 \cdots \delta_n \cdots \delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1), \quad (5)$$

to select the next digit δ_{k+n} :

$$\delta_{k+n} = \begin{cases} 0, & \text{if } \delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1}0 \neq \delta_{v+1} \cdots \delta_{v+n} \quad (v = 0, 1, \dots, k-1), \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The proof that the impossibility of further appending digits in the sequence (5) occurs only when the written digits form the system $\rho_n(2)$, carried out in [3]. Here, we derive this proof as a consequence of a more general method for constructing systems $\rho_n(q)$ — method A_1 .

Using method A, systems $\rho_5(2)$, $\rho_6(2)$, etc., can be constructed easily.

$$\begin{aligned} \delta_5(2) &= 111110000010001100101001110101101111, \\ \delta_6(2) &= 1111110000001000011000101000111001001 \\ &\quad 01100110100111101010110111011111, \\ \delta_7(2) &= 1111111000000010000011000010100001110 \\ &\quad 0010010001011000110100011110010011001 \\ &\quad 0101001011100110110011101001111101010 \\ &\quad 11010111101101110111111 \end{aligned}$$

Section 2

Method A_1 . We select the first n digits $\delta_1, \dots, \delta_n$ arbitrarily. The digits $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \dots$ will be appended according to the following general rule: let $k + n - 1$ digits be written

$$\delta_1 \cdots \delta_n \cdots \delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1). \quad (6)$$

Let us consider the $n - 1$ -digit number $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1}$, located at the end of the sequence (6). Let the last μ digits of this number ($0 \leq \mu \leq n - 1$) form the largest group that coincides with the group of initial digits $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\mu$. Now, we choose the digit δ_{k+n} to be anything except $\delta_{\mu+1}$, provided that the resulting new n -digit number $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \delta_{k+n}$ does not coincide with any of the already written n -digit numbers $\delta_{v+1} \dots \delta_{v+n}$ (for $v = 0, 1, \dots, k - 1$), or equal to $\delta_{\mu+1}$, if assigning any digit other than $\delta_{\mu+1}$ leads to an already encountered n -digit number in (6). The process of assigning stops when any new digit results in an already encountered n -digit number.

Let the impossibility of further appending digits in sequence (6) occur at $k = \tau$ (where $\tau \geq 1$). It is evident that all n -digit numbers that appear in the resulting sequence

$$\delta_1 \cdots \delta_n \cdots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \cdots \delta_{\tau+n-1}, \quad (7)$$

will be distinct. However, it remains unclear whether the appending of new digits could have ended before putting all the n -digit numbers.

Thus, to prove that the sequence (7), constructed using method A_1 , coincides with some system $\rho_n(q)$, it is sufficient to verify that among the n -digit numbers

$$\delta_{v+1} \cdots \delta_{v+n} \quad (v = 0, 1, \dots, \tau - 1), \quad (8)$$

that are contained in the sequence (7), each of the existing n -digit numbers in (1) will be encountered.

Let us denote the values $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ values, each of which can take any of the q values $0, 1, \dots, q - 1$. First, we show that any number of the form

$$\beta_{n-1} \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n-1} \quad (\beta_{n-1} = 0, 1, \dots, q - 1) \quad (9)$$

will appear in the sequence (7). Indeed, the $n - 1$ -digit number $\delta_{\tau+1}, \dots, \delta_{\tau+n-1}$, which ends the sequence (7), appears in it with any digit to the right (otherwise, the process of appending would not have been stopped); therefore, this number appears in (7) exactly $q + 1$ times. Each time, different digits must be adjacent to it on the left, which is only possible if this number appears once at the beginning of the sequence (7), that is, if

$$\delta_{\tau+1}, \dots, \delta_{\tau+n-1} = \delta_1, \dots, \delta_{n-1}. \quad (10)$$

Thus, any number of the form $\beta_{n-1}, \delta_{\tau+1}, \dots, \delta_{\tau+n-1}$ appears in (7) and, due to (10), any number of the form $\beta_{n-1}, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ (where $\beta_{n-1} = 0, 1, \dots, q - 1$).

Now we divide all n -digit numbers into classes R_v^n (where $v = 0, 1, \dots, n$), where R_v^n is the set of words whose longest suffix that matches $\delta_1 \dots \delta_n$ is of length v .¹

The numbers of class R_v^n will be written in the form $\beta_v, \dots, \beta_{n-1}, \delta_1, \dots, \delta_v$. (Note that not every number of the form $\beta_v, \dots, \beta_{n-1}, \delta_1, \dots, \delta_v$ necessarily belongs to the class R_v^n — it may belong to the class $R_{v_1}^n$, where $v_1 > v$.)

The class R_n^n obviously consists of a single number $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$; this number is the starting point of sequence (7). As shown earlier, all numbers of the form $\beta_{n-1}, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ are also contained in (7). Thus, it has been proven that all numbers from the classes R_n^n and R_{n-1}^n appear in sequence (7). Now, let's apply induction. Suppose that all numbers from the class R_{n-s}^n (where $s \geq 1$) are contained in (7). We show that in this case, all numbers from the class $R_{n-(s+1)}^n$ are also contained in (7).

Let us consider the $n - 1$ -digit numbers

$$\beta''_{n-s} \cdots \beta''_{n-1} \delta_1 \cdots \delta_{n-(s+1)},$$

¹Translator's note: That is, the set R_v^n is formed by the words $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ such that $\delta_1 \cdots \delta_v = \alpha_{n-v+1} \cdots \alpha_n$ and $\delta_1 \cdots \delta_k \neq \alpha_{n-k+1} \cdots \alpha_n$, for $k = v + 1, \dots, n - v$, with $v \in \{0 \cdots n\}$.

belonging to the class $R_{n-(s+1)}^{n-1}$.

Each of these $n - 1$ -digit numbers are a prefix of the n -digit numbers of the class R_{n-s}^n

$$\beta'_{n-s} \cdots \beta'_{n-1} \delta_1 \cdots \delta_{n-(s+1)} \delta_{n-s}.$$

By the induction hypothesis, the sequence (7) contains any n -digit number of the form

$$\beta'_{n-s} \cdots \beta'_{n-1} \delta_1 \cdots \delta_{n-(s+1)} \delta_{n-s}$$

and therefore any number of the form

$$\beta''_{n-s} \cdots \beta''_{n-1} \delta_1 \cdots \delta_{n-(s+1)} \delta_{n-s}. \quad (11)$$

According to the A_1 method, each of the numbers in equation (11) could only be written in sequence (7) if any number of the form

$$\beta''_{n-s} \cdots \beta''_{n-1} \delta_1 \cdots \delta_{n-(s+1)} \beta \quad (\beta \neq \delta_{n-s}). \quad (12)$$

had already appeared in sequence (7).

From (11) and (12), we obtain that each $n - 1$ -digit number

$$\beta''_{n-s} \cdots \beta''_{n-1} \delta_1 \cdots \delta_{n-(s+1)} \quad (13)$$

of the class $R_{n-(s+1)}^{n-1}$ appears in (7) exactly q times.

None of these numbers stands at the beginning of the sequence (7) (since at the beginning of (7) is the number $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$, which belongs to the class R_{n-1}^{n-1} , different from the class $R_{n-(s+1)}^{n-1}$ for $s \geq 1$). Thus, each $n - 1$ -digit number (13) will appear in the sequence (7) with any digit to the left and, consequently, (7) contains all n -digit numbers of the form

$$\beta_{n-(s+1)} \beta''_{n-s} \cdots \beta''_{n-1} \delta_1 \cdots \delta_{n-(s+1)},$$

and thus all numbers of the class $R_{n-(s+1)}^n$.

Thus, the sequence (7) contains all classes R_v^n , where $v = n, n - 1, \dots, 1, 0$ (and thus all n -digit numbers) and, consequently, represents some system $\rho_n(q)$.

Section 3

We show that not every system $\rho_n(q)$ can be obtained by method A_1 .

First of all, we note that for each system $\rho_n(q)$,

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} \quad (14)$$

the equality

$$\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}$$

holds, which was previously proved [see (10)] for the systems $\rho_n(q)$ obtained by method A_1 . Indeed, the $n - 1$ -digit number $\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}$, located at the end of system (14), appears in it q more times (since system (14), being a system $\rho_n(q)$, contains each n -digit number of the form $\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}\beta$, where $\beta = 0, 1, \dots, q - 1$). The rest of the proof coincides with the proof of (10).

In accordance with (10), we denote the systems $p_n(q)$ in the following form:

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \mid \delta_1 \dots \delta_{n-1} \quad \text{or} \quad \delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1} \quad (\tau = q^n), \quad (15)$$

where the system of the first q^n digits

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \quad (15')$$

is called the system $\rho'_n(q)$. We perform an arbitrary cyclic permutation of the symbols in $\rho'_n(q)$:

$$\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_k. \quad (16)$$

Let us append on the right of (16) the $n - 1$ -digit number $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1}$; then we obtain the sequence

$$\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_k \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1}. \quad (17)$$

This sequence contains all n -digit numbers that appear in (15), and therefore also represents a certain system $\rho_n(q)$.

Two systems $\rho_n(q)$ are called *essentially different* if their corresponding systems $\rho'_n(q)$ cannot be transformed into one another by any cyclic permutation. We consider two systems to be *simply different* if not all their digits match correspondingly. For example, there are exactly 4 different systems $\rho_2(2)$:

$$1100|1, \quad 1001|1, \quad 0011|0, \quad 0110|0.$$

Among these systems, there are no essentially different ones. The systems $\rho_3(2)$

$$01000111|01, \quad 11100010|11$$

not only they are different, but also they are essentially different; the systems (15) and (17) are not essentially different.

As shown in [8], the number of essentially different systems $\rho_n(2)$ for any n is equal to 2^r , where $r = 2^{n-1} - n$. Let T_n denote the number of essentially different systems $\rho_n(2)$ that can be obtained by method A_1 . Since in method A_1 with $q = 2$, all digits starting from δ_{n+1} are

uniquely determined, the number of different systems $\rho_n(2)$ obtained by method A_1 equals the number of different n -digit numbers $\delta_1, \dots, \delta_n$, i.e., 2^n . Some of these 2^n systems may not be essentially different, so

$$T_n \leq 2^n.$$

But for $n > 4$

$$2^n < 2^r \quad (r = 2^{n-1} - n)$$

and, therefore,

$$T_n < 2^r \quad (n \geq 5).$$

Thus, for $n \geq 5$, it is not possible to obtain all systems $\rho_n(q)$ by method A_1 . (Even for $n = 5$, out of the 2048 essentially different systems $\rho_5(2)$, method A_1 can produce at most 32 systems).

Section 4

A question arises about a method that would allow for the construction of any existing system $\rho_n(q)$. Before describing such a method, we first introduce several auxiliary statements. Let us consider the system $\rho_n(q)$:

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_r \delta_1 \dots \delta_{n-1} \tag{18}$$

Let $\delta_{k1} \delta_{k2} \dots \delta_{k(n-1)}$ be an arbitrary $n-1$ -digit number, different from $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$. This number appears in system (18) exactly q times. Each time, the digit to the right of it extends the number $\delta_{k1} \dots \delta_{k(n-1)}$ into an n -digit number. Let $\delta_{k1} \delta_{k2} \dots \delta_{k(n-1)} \delta_{kn}$ be the last (counting from left to right) of these n -digit numbers. We refer to the resulting set of $s = q^{n-1} - 1$ n -digit numbers

$$\delta_{k1} \dots \delta_{k(n-1)} \delta_{kn} \quad (\text{for } k = 1, 2, \dots, q^{n-1} - 1) \tag{19}$$

as the *system corresponding to the given* $\rho_n(q)$.

We call a *special system* to any set of n -digit numbers satisfying the following conditions

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} \delta_{12} \dots \delta_{1(n-1)} \delta_{1n} \\ \vdots \\ \delta_{k1} \delta_{k2} \dots \delta_{k(n-1)} \delta_{kn} \\ \vdots \\ \delta_{s1} \delta_{s2} \dots \delta_{s(n-1)} \delta_{sn} \end{array} \right\} s = q^{n-1} - 1 \tag{20}$$

(where δ_{ik} are integers from the interval $0 < \delta_{ik} < q - 1$), a *special system* if the following conditions are met:

- (a) all $n-1$ -digit numbers $\delta_{k1} \dots \delta_{k(n-1)}$ (for $k = 1, 2, \dots, q^{n-1} - 1$) are distinct, and none of them equals $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$. Thus, among the numbers $\delta_{k1} \dots \delta_{k(n-1)}$, all possible $n-1$ -digit numbers appear, except for $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$.
- (b) it is possible to arrange the rows in equation (20) such that for every $k \geq 2$, every $n-1$ -digit number $\delta_{k2} \dots \delta_{kn}$ is either equal to one of the numbers $\delta_{v1} \dots \delta_{v(n-1)}$ (for $v = 1, 2, \dots, k-1$) or equal to $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$.

For example, the systems $\rho_3(2)$ and $\rho_2(4)$

$$1000101110 \quad \text{and} \quad 22330010203112132$$

correspond respectively to the systems

$$\left. \begin{array}{l} 110 \\ 011 \\ 001 \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad \left. \begin{array}{l} 32 \\ 03 \\ 13 \end{array} \right\}. \quad (21)$$

Both systems in (21) are, obviously, special.

Lemma 1. *Every system (19) corresponding to $\rho_n(q)$ is a special system.*²

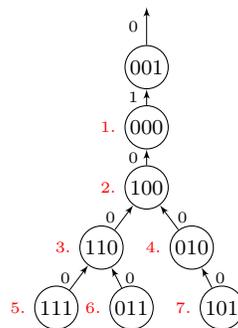
According to definition (19), among the numbers $\delta_{k1} \dots \delta_{k(n-1)}$, all $n-1$ -digit numbers different from $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$ appear. Thus, to verify property (a), it is sufficient to show that (19) contains at least one number of the form $\beta\delta_1 \dots \delta_{n-1}$.

Let us first consider the systems $\rho_n(q)$, for which

$$\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} \neq \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}.$$

² Translator's note: It is immediate to see that every special system $\rho_n(q)$ is a spanning tree of the de Bruijn graph of order $n-1$ in the q -symbol alphabet. Given the system $\rho_4(2) = 0011110110010100001$, we can give the following ordering of the system corresponding to the given $\rho_4(2)$:

0001 1000 1100 0100 1110 0110 1010. It is immediate to see that it is a special system. This ordering allows us to visualize the special system as the following tree:



This is one spanning tree of the de Bruijn graph of order 3 in the 2-symbol alphabet, which gives rise to the system $\rho_4(2)$. The construction for an arbitrary $\rho_n(q)$ consists in using all the edges in the de Bruijn graph of order $n-1$ in the following order: start at the root vertex and for each vertex we first choose an edge that is not in the spanning tree. If we already used that edge, then we use another one that is not in the spanning tree. If we already used all those edges, then we finally choose the one in the spanning tree. Each time we are in a vertex $a_1 \dots a_{n-1}$, and we use an edge labeled with $b \in \{0, \dots, q-1\}$, we transition to the vertex $a_2 \dots a_{n-1}b$.

The number $\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} \delta_{n-1}$, being the last of the numbers in system (18) of the form $\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} \beta$, will appear among the numbers in system (19).

For the systems $\rho_n(q)$, in which

$$\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}$$

the following relations hold:

$$\begin{aligned} \delta_\tau &= \delta_1 = \dots = \delta_{n-1} \\ \delta_{\tau-1} &\neq \delta_\tau \\ \delta_{\tau-1} \delta_1 \dots \delta_{n-2} &\neq \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}. \end{aligned}$$

The number $\delta_{\tau-1} \delta_1 \dots \delta_{n-2} \delta_{n-1}$, equal to the number $\delta_{\tau-1} \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2}$, will be the last among the numbers of the form $\delta_{\tau-1} \delta_1 \dots \delta_{n-2} \beta$ appearing in (18). Thus, (19) always contains the number $\beta \delta_1 \dots \delta_{n-1}$ and, consequently, for systems corresponding to $\rho(q)$, property (a) holds.

$$\beta = \begin{cases} \delta_{\tau-1}, & \text{if } \delta_\tau = \delta_1 = \dots = \delta_{n-1}, \\ \delta_\tau, & \text{in other cases.} \end{cases}$$

Now suppose that for some $\rho_n(q)$

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1}$$

there corresponds a system that is not special due to the failure of property (b).

Let us write this system in the form

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} \delta_{12} \dots \delta_{1(n-1)} \delta_{1n} \\ \vdots \\ \delta_{i1} \delta_{i2} \dots \delta_{i(n-1)} \delta_{in} \\ \vdots \\ \delta_{i_1 1} \delta_{i_1 2} \dots \delta_{i_1(n-1)} \delta_{i_1 n} \\ \vdots \\ \delta_{s1} \delta_{s2} \dots \delta_{s(n-1)} \delta_{sn} \end{array} \right\} \delta_{12} \dots \delta_{1n} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}; \quad s = q^{n-1} - 1. \quad (22)$$

Let $i - 1$ be the largest index in the different arrangements of the rows of (22) for which property (b) holds ($i \geq 2$). Consider the $n - 1$ -digit number $\delta_{i2} \dots \delta_{in}$. By definition (19), the numbers

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1}, \delta_{k1} \dots \delta_{k(n-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, q^{n-1} - 1) \quad (23)$$

correspond to the set of all existing $n - 1$ -digit numbers. Thus, the number $\delta_{i2} \dots \delta_{in}$ appears among the numbers (23).

According to the definition of index i , this number cannot coincide with any of the numbers

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1}, \delta_{k1} \dots \delta_{k(n-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, i-1).$$

Consequently, there exists $i_1 \geq i$ such that

$$\delta_{i_2} \dots \delta_{i_n} = \delta_{i_1 1} \dots \delta_{i_1(n-1)} \quad (i_1 \geq i).$$

Similarly, for the $n-1$ -digit number $\delta_{i_2 2} \dots \delta_{i_1 n}$, using the inequality $i_1 \geq i$, we obtain

$$\delta_{i_2 2} \dots \delta_{i_1 n} = \delta_{i_2 1} \dots \delta_{i_2(n-1)} \quad (i_2 \geq i).$$

Continuing this process, we eventually arrive at the equalities:

$$\begin{aligned} \delta_{i_2} \dots \delta_{i_n} &= \delta_{i_1 1} \dots \delta_{i_1(n-1)} & (i_1 \geq i) \\ \delta_{i_1 2} \dots \delta_{i_1 n} &= \delta_{i_2 1} \dots \delta_{i_2(n-1)} & (i_2 \geq i) \\ &\vdots \\ \delta_{i_{r-1} 2} \dots \delta_{i_{r-1} n} &= \delta_{i_r 1} \dots \delta_{i_r(n-1)} & (i_r \geq i) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{24}$$

Obviously, a moment will come when the next $n-1$ -digit number $\delta_{i_r 2} \dots \delta_{i_r n}$ coincides with one of the numbers

$$\delta_{i_v 1} \dots \delta_{i_v(n-1)} \quad (v = 0, 1, \dots, r; i_0 = i).$$

Let such a coincidence occur for $v = p$:

$$\delta_{i_r 2} \dots \delta_{i_r n} = \delta_{i_p 1} \dots \delta_{i_p(n-1)} \quad (0 \leq p \leq r).$$

Let $\delta_{i_v 1} = \lambda_v$, and consider the sequence

$$\lambda_p \lambda_{p+1} \dots \lambda_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+n-1}. \tag{25}$$

Due to (24), we obtain

$$\lambda_p \lambda_{p+1} \dots \lambda_{p+n-1} = \delta_{i_p 1} \delta_{i_p+1 1} \dots \delta_{i_p+n-1 1} = \delta_{i_p 1} \delta_{i_p 2} \dots \delta_{i_p n}.$$

Similarly,

$$\begin{aligned} \lambda_{p+1} \lambda_{p+2} \dots \lambda_{p+n} &= \delta_{i_{p+1} 1} \delta_{i_{p+1} 2} \dots \delta_{i_{p+1} n}, \\ &\vdots \\ \lambda_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+n-1} &= \delta_{i_r 1} \delta_{i_r 2} \dots \delta_{i_r n}. \end{aligned}$$

Thus, the n -digit numbers

$$\lambda_v \dots \lambda_{v+n-1} \quad (v = p, p+1, \dots, r),$$

contained in the sequence (25), belong to the system (22); all $(n-1)$ -digit numbers

$$\lambda_v \dots \lambda_{v+n-2} \quad (v = p, p+1, \dots, r+1)$$

appear among the numbers (24) and, therefore, are distinct from $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$. Finally,

$$\lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+n-1} = \delta_{i_r 2} \dots \delta_{i_r n} = \delta_{i_p 1} \dots \delta_{i_p (n-1)} = \lambda_p \dots \lambda_{p+n-2},$$

and, therefore

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_p \dots \lambda_{p+n-2}. \quad (26)$$

Let $p < r$. It is easy to show that every n -digit number $\lambda_v \dots \lambda_{v+n-1}$ ($v = p, \dots, r-1$) will appear in $\rho_n(q)$ to the left of the number $\lambda_{v+1} \dots \lambda_{v+n}$. Indeed, according to definition (22), the number $\lambda_{v+1} \dots \lambda_{v+n-1} \lambda_{v+n}$ is the last n -digit number in $\rho_n(q)$ that starts with $\lambda_{v+1} \dots \lambda_{v+n-1}$. Thus, $\lambda_v \lambda_{v+1} \dots \lambda_{v+n-1}$ could only appear to the right of the number $\lambda_{v+1} \dots \lambda_{v+n-1} \lambda_{v+n}$ if it were at the end of $\rho_n(q)$, which is impossible since $\lambda_v \dots \lambda_{v+n-1} \neq \delta_1 \dots \delta_{n-1}$.

It follows that for $v < v_1$, every n -digit number $\lambda_v \dots \lambda_{v+n-1}$ will appear in $\rho_n(q)$ earlier than any of the numbers $\lambda_{v_1} \dots \lambda_{v_1+n-1}$. In particular, $\lambda_p \dots \lambda_{p+n-1}$ will appear to the left of the number $\lambda_r \dots \lambda_{r+n-1}$, which is impossible since, according to (26),

$$\begin{aligned} \lambda_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+n-1} &= \lambda_r \lambda_p \dots \lambda_{p+n-2} \\ \lambda_p \dots \lambda_{p+n-2} &\neq \delta_1 \dots \delta_{n-1}. \end{aligned}$$

In the case of $r = g$, using (26), we obtain

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_r \dots \lambda_r,$$

which is again impossible, since the system corresponding to ρ_n cannot contain numbers consisting of identical signs. The obtained contradiction proves the lemma.

Lemma 2. *Each special system can be obtained by the following method*³:

Method B. *In the first row, write any n -digit number $\delta_{11} \delta_{12} \dots \delta_{1(n-1)} \delta_{1n}$, whose digits are not all the same. (Thus, $\delta_{11} \dots \delta_{1(n-1)} \neq \delta_{12} \dots \delta_{1n}$). All subsequent rows, starting from the second, are written according to the following general rule: let k rows already be written ($k \geq 1$)*

$$\begin{aligned} &\delta_{11} \delta_{12} \delta_{13} \dots \delta_{1(n-1)} \delta_{1n}, \\ &\quad \vdots \\ &\delta_{k1} \delta_{k2} \delta_{k3} \dots \delta_{k(n-1)} \delta_{kn} \end{aligned}$$

Let us consider $n-1$ -digit numbers.

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n}, \delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \quad (v = 1, 2, \dots, k). \quad (27)$$

Let us call admissible numbers those numbers $\mu_1 \dots \mu_{n-1}$ from the set (27) for which either:

³Translator's note: As we said in footnote 2, each special system corresponding to a given $\rho_n(q)$ is exactly a spanning tree of the de Bruijn graph of order $n-1$ in the q -symbol alphabet. Thus, this lemma gives a method to generate any spanning tree.

- $\mu_1 \dots \mu_{n-2} = \delta_{13} \dots \delta_{1n}$ if $\delta_{13} \dots \delta_{1n}$ appeared among the numbers $\delta_{v2} \dots \delta_{v(n-1)}$ ($v = 1, 2, \dots, k$) less than $q - 1$ times; or
- $\mu_1 \dots \mu_{n-2} \neq \delta_{13} \dots \delta_{1n}$, if $\mu_1 \dots \mu_{n-2}$ appeared among the numbers $\delta_{v2} \dots \delta_{v(n-1)}$ ($v = 1, 2, \dots, k$) less than q times.

To construct the $(k + 1)$ -th row, we choose $\delta_{(k+1)2} \dots \delta_{(k+1)n}$ equal to any of the admissible numbers; the digit $\delta_{(k+1)1}$ is chosen so that $\delta_{(k+1)1} \dots \delta_{(k+1)(n-1)}$ differs from any of the numbers in (27).

Thus, the $k + 1$ -th row is constructed. The construction by method B is considered complete when the construction of the next row becomes impossible.

First, we prove that method B always leads to a special system. Indeed, the process of constructing the rows cannot end due to the impossibility of choosing $\delta_{(k+1)1}$ (this follows from the selection of admissible numbers). Thus, the construction ends due to the impossibility of choosing $\delta_{(k+1)2} \dots \delta_{(k+1)n}$, i.e., because for some $k = s$, the group of admissible numbers will not contain any numbers.

Let's write down the rows that can be constructed using method B:

$$\left. \begin{array}{ccccc} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1(n-1)} & \delta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \cdots & \delta_{k(n-1)} & \delta_{kn} \\ \delta_{(k+1)1} & \delta_{(k+1)2} & \cdots & \delta_{(k+1)(n-1)} & \delta_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \cdots & \delta_{s(n-1)} & \delta_{sn} \end{array} \right\}. \quad (28)$$

Thus, since each of the numbers $\delta_{(k+1)2}, \dots, \delta_{(k+1)n}$ is contained among the numbers (27) ($k = 1, 2, \dots, s - 1$), it can be asserted that property (b) holds for system (28). Furthermore, from the method of choosing the digits of $\delta_{(k+1)1}$, it follows that all $n - 1$ -digit numbers

$$\left. \begin{array}{c} \delta_{11}, \dots, \delta_{1(n-1)} \\ \vdots \\ \delta_{s1}, \dots, \delta_{s(n-1)} \end{array} \right\} \quad (29)$$

are distinct and not equal to $\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}$. Thus, it remains to show that $s = q^{n-1} - 1$, i.e., that among the numbers (29), all $n - 1$ -digit numbers are included except for $\delta_{12}, \dots, \delta_{1n}$.

Consider the numbers (27) for $k = s$:

$$\delta_{12}, \dots, \delta_{1n} \quad \text{and} \quad \delta_{v1}, \dots, \delta_{v(n-1)} \quad (v = 1, 2, \dots, s) \quad (30)$$

The number $\delta_{12} \dots \delta_{1n-1}$ appears among the numbers $\delta_{v2} \dots \delta_{v(n-1)}$ ($v = 1, 2, \dots, s$) either $q - 1$ or q times, depending on whether it coincides with the number $\delta_{13} \dots \delta_{1n}$ or not (otherwise, the group of admissible numbers for $k = s$ would contain the number $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$ and would not

be empty). But then, among the numbers (30), any number of the following form appears:

$$\beta_1 \delta_{12} \cdots \delta_{1n-1} \quad (\beta_1 = 0, 1, \dots, q-1).$$

Suppose that among the numbers (30), any number of the following form appears:

$$\beta_i \beta_{i-1} \cdots \beta_1 \delta_{12} \cdots \delta_{1n-i} \quad (0 \leq \beta_j \leq q-1; j = 1, 2, \dots, i).$$

Then, the number $\beta_i \cdots \beta_1 \delta_{12} \cdots \delta_{1n-i-1}$ appears among the numbers $\delta_{v2} \cdots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, s$) either $q-1$ or q times, depending on whether it coincides with $\delta_{13} \cdots \delta_{1n}$ or not. Consequently, any number of the form

$$\beta_{i+1} \beta_i \cdots \beta_1 \delta_{12} \cdots \delta_{1n-(i+1)}$$

also appears among the numbers (30). Thus, by induction, we obtain that among the numbers (30), every number of the form $\beta_{n-1} \beta_{n-2} \cdots \beta_1$ appears, i.e., every $n-1$ -digit number.

Therefore,

$$s+1 = q^{n-1},$$

and the system (28) is special.

We now show that any of the existing special systems can be obtained using method B . Suppose that the special system

$$\left. \begin{array}{ccccc} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n-1} & \delta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{in-1} & \delta_{in} \\ \delta_{(i+1)1} & \delta_{(i+1)2} & \cdots & \delta_{(i+1)(n-1)} & \delta_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \cdots & \delta_{sn-1} & \delta_{sn} \end{array} \right\} \quad (s = q^{n-1} - 1) \quad (31)$$

cannot be obtained using method B .

Let i denote the largest number of rows of this system that can be constructed using method B . Since the first row of system (31) must satisfy the sole requirement $\delta_{11} \cdots \delta_{1n-1} \neq \delta_{12} \cdots \delta_{1n}$, the same as the first row in method B , we obtain that $i \geq 1$.

Consider the $(i+1)$ -th row of system (31). By property (a), the number $\delta_{(i+1)1} \cdots \delta_{(i+1)(n-1)}$ is distinct from the numbers

$$\delta_{12} \cdots \delta_{1n} \quad \text{and} \quad \delta_{v1} \cdots \delta_{v(n-1)} \quad (v = 1, 2, \dots, i). \quad (31')$$

Consequently, the $n-2$ -digit number $\delta_{(i+1)2} \cdots \delta_{(i+1)(n-1)}$ appears among the numbers $\delta_{v2} \cdots \delta_{v(n-1)}$ ($v = 1, 2, \dots, i$) fewer than $q-1$ or q times, depending on whether the equality

$$\delta_{v2} \cdots \delta_{v(n-1)} = \delta_{13} \cdots \delta_{1n}$$

holds or not. Moreover, from property (b), it follows that the number $\delta_{(i+1)2} \cdots \delta_{(i+1)n}$ coincides with one of the numbers (31'). Therefore, $\delta_{(i+1)2} \cdots \delta_{(i+1)n}$ is one of the admissible numbers. This implies the possibility of constructing the $i+1$ -th row of system (31) using method B , which contradicts the choice of the index i . Thus, the special system (31) can be constructed using method B , and therefore, Lemma 2 is fully proven.

Section 5

Let us proceed to the formulation of the general method for constructing systems $\rho_n(q)$.

Method A_2 . *The first n digits $\delta_1\delta_2\dots\delta_n$ are written arbitrarily. We select some special system with $\delta_{12}\dots\delta_{in} = \delta_1\dots\delta_{n-1}$. The remaining digits, starting from the $n+1$ -th, are written according to the following general rule: to the already written $n+k-1$ digits*

$$\delta_1\delta_2\dots\delta_{k+1}\dots\delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1) \quad (32)$$

we append the digit δ_{k+n} on the right such that:

- *The resulting n -digit number $\delta_{k+1}\dots\delta_{k+n-1}\delta_{k+n}$ appears for the first time in sequence (32)*
- *It coincides with one of the numbers from the chosen special system only if all other numbers of the form $\delta_{k+1}\dots\delta_{k+n-1}\beta$ ($\beta \neq \delta_{k+n}$) have already appeared in (32)*

The construction of sequence (32) is completed when appending any digit would result in an n -digit number that has already appeared.

Theorem. *The sequences constructed by method A_2 are $\rho_n(q)$ systems; each existing $\rho_n(q)$ system can be obtained by method A_2 .*

Proof. Suppose the appending of digits to sequence (32) terminated at $k = \tau$ ($\tau \geq 1$):

$$\delta_1\dots\delta_{n-1}\dots\delta_{\tau+1}\dots\delta_{\tau+n-1}. \quad (33)$$

From the selection of digits δ_{k+n} ($k = 1, 2, \dots, \tau - 1$) it follows that all n -digit numbers in sequence (33) are distinct. Thus, (33) will be a $\rho_n(q)$ system if among the numbers

$$\delta_{v+1}\dots\delta_{v+n} \quad (v = 0, 1, \dots, \tau - 1)$$

every existing n -digit number appears.

By verbatim repetition of the reasoning used when considering method A_1 (derivation of equality (10)), we obtain that sequence (33) contains all numbers of the form

$$\beta\delta_1\dots\delta_{n-1} \quad \text{and} \quad \delta_1\dots\delta_{n-1}\beta \quad (0 \leq \beta \leq q - 1).$$

Let us write out the special system used to construct sequence (33):

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11}\delta_{12}\dots\delta_{1n-1}\delta_{1n} \\ \vdots \\ \delta_{v1}\delta_{v2}\dots\delta_{vn-1}\delta_{vn} \\ \vdots \\ \delta_{s1}\delta_{s2}\dots\delta_{sn-1}\delta_{sn} \end{array} \right\} (\delta_{12}\dots\delta_{1n} = \delta_1\dots\delta_{n-1}; \quad s = q^{n-1} - 1).$$

From the inequality $\delta_{12} \dots \delta_{1n} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}$ it follows that in (33) every number of the form

$$\beta \delta_{12} \dots \delta_{1n} \text{ and } \delta_{12} \dots \delta_{1n} \beta \quad (\beta = 0, 1 \dots q-1) \quad (34)$$

appears.

Let us apply induction. Suppose that sequence (33) contains all n -digit numbers of the form

$$\beta \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \text{ and } \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \beta \quad (v = 1, 2 \dots t; \quad t \geq 1; \quad 0 \leq \beta \leq q-1).$$

In particular, (33) then contains all numbers

$$\delta_{v1} \dots \delta_{vn} \quad (v = 1, 2, \dots, t)$$

and consequently, according to method A_2 , all numbers of the form

$$\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \beta$$

will appear in (33).

By property (b), the number $\delta_{(t+1)2} \dots \delta_{(t+1)n}$ coincides with one of the numbers

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n} \quad \text{or} \quad \delta_{v1} \dots \delta_{v(n-1)} \quad (v = 1, 2 \dots t),$$

so that together with $\delta_{12} \dots \delta_{1n} \beta$ and $\delta_{v1} \dots \delta_{v(n-1)} \beta$, sequence (33) contains, in particular, every number

$$\delta_{(t+1)2} \dots \delta_{(t+1)n} \beta \quad (\beta = 0, 1 \dots q-1).$$

Thus, the $n-1$ -digit number $\delta_{(t+1)2} \dots \delta_{(t+1)n}$ appears in (33) q times and, consequently*, (33) contains all numbers of the form

$$\beta \delta_{(t+1)2} \dots \delta_{(t+1)n}.$$

Combining these results, we obtain that sequence (33) contains all numbers of the form

$$\beta \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \quad \text{and} \quad \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \beta \quad (v = 1, 2, \dots, t+1; \quad 0 \leq \beta \leq q-1).$$

Therefore, by induction, it is proved that (33) contains all numbers of the form

$$\beta \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \quad \text{and} \quad \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \beta \quad (1 \leq v \leq s; \quad 0 \leq \beta \leq q-1)$$

and, in particular, all numbers

$$\delta_{v1} \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \quad (v = 1, 2 \dots s).$$

Again, by method A_2 , it follows that (33) contains any number

$$\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \beta, \quad (v = 1, 2 \dots s).$$

□

*We assume $\delta_{(t+1)2} \dots \delta_{(t+1)n} \neq \delta_{12} \dots \delta_{1n}$, since for the case $\delta_{(t+1)2} \dots \delta_{(t+1)n} = \delta_{12} \dots \delta_{1n}$, the statement that numbers $\beta \delta_{(t+1)2} \dots \delta_{(t+1)n}$ appear in sequence (33) coincides with what was already proved in (34).

Chapter II. On Sums of Fractional Parts

For the case of the linear function αx , the problem of sums of fractional parts has been thoroughly investigated in the works of A. Ya. Khinchin [1], Ostrovskii [5], Hardy and Littlewood.⁴ It has been proved that for any irrational α

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \quad (1)$$

and this estimate cannot be improved for any irrational number α . Furthermore, there are known irrational α for which

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \quad (2)$$

and it has been proved that this estimate cannot be further improved for any α .

Finally, for almost all α the following estimate holds:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = \Omega(\ln P), \quad (3)$$

but for every $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(\ln^{1+\varepsilon} P). \quad (4)$$

In this chapter we consider analogous questions for sums of fractional parts of the exponential function αq^x , where q is an integer ($q \geq 2$). In the study of sums $\sum \{\alpha q^x\}$ it was obviously sufficient to restrict ourselves to irrational numbers α from the interval $(0, 1)$; the set of irrational numbers coincides with the set of numbers for which the function αx is uniformly distributed.

Naturally, for the sums $\sum \{\alpha q^x\}$ as well, we consider the set L of numbers α ($0 < \alpha < 1$) for which the fractional parts of the function αq^x are uniformly distributed^{*}.

The proofs are based on the application of $\rho_n(q)$ systems and two lemmas. The first lemma reduces the problem of sums of fractional parts to the study of sums of digits in the q -ary expansion of α . The second lemma allows us to modify the digits of α 's expansion without violating the uniform distribution of αq^x , in such a way that their sum, and consequently the sum of fractional parts, changes substantially.

⁴Translator's note: In this chapter we use the usual asymptotic notation: We write $f(n) = \Omega(g(n))$ exactly when $|f|$ is not dominated by g asymptotically. That is, exactly when $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} > 0$. We write $f(n) = O(g(n))$ exactly when $|f|$ is asymptotically bounded above by g . That is, exactly when $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} < \infty$. We write $f(n) = o(g(n))$ exactly when f is dominated by g asymptotically. That is, exactly when $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

^{*}It is known [7] that the measure of the set L equals 1; methods for constructing values $\alpha \in L$ are also known [3].

Section 1

Lemma 1. *Let α be given in a number system with base $q \geq 2$:*

$$\alpha = 0.\delta_1 \dots \delta_k \dots$$

and let $\mu \geq 1$ be an arbitrary integer. Then the following relation holds:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} = \frac{1}{q^\mu - 1} \sum_{v=1}^{\mu} q^{\mu-v} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + \frac{\theta}{q^\mu - 1} \quad (|\theta| \leq 1). \quad (5)$$

Proof. For every integer $x \geq 1$,

$$\{\alpha q^{\mu x}\} = 0.\delta_{\mu x+1} \dots \delta_{\mu x+k} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{\mu x+k}}{q^k}.$$

Summation over x gives

$$S_\mu = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^k} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+k}$$

We split the outer sum into groups of μ terms:

$$S_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\mu} \frac{1}{q^{\mu k+v}} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu(x+k)+v}. \quad (6)$$

Let us now transform the inner sum:

$$\sum_{x=1}^P \delta_{\mu(x+k)+v} = \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + \left(\sum_{x=P+1}^{P+k} \delta_{\mu x+v} - \sum_{x=1}^k \delta_{\mu x+v} \right);$$

due to the fact that $0 \leq \delta_k \leq q-1$,

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+k} \delta_{\mu x+v} - \sum_{x=1}^k \delta_{\mu x+v} \right| \leq k(q-1)$$

and consequently,

$$\sum_{x=1}^P \delta_{\mu(x+k)+v} = \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + \theta_h(q-1)k, \quad |\theta_k| \leq 1.$$

Now (6) takes the form

$$S_\mu = \sum_{v=1}^{\mu} \frac{1}{q^v} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} + \theta(q-1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\mu} \frac{k}{q^{\mu k+v}}, \quad |\theta| \leq 1. \quad (7)$$

Using the facts

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{(q^\mu - 1)^2} \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{q^\mu - 1},$$

we obtain from (7) the statement of the lemma. \square

Lemma 2. Let $\alpha' = 0.\delta'_1 \dots \delta'_k \dots$ have the property that $\alpha' q^x$ is uniformly distributed ($\alpha' \in L$). Let $k_1 < k_2 < \dots$ be indices satisfying

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_{2s}}{k_{2s-1}} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_{2s+1}}{k_{2s}} = \infty. \quad (8)$$

Define the expansion $\alpha = 0.\delta_1 \dots \delta_k \dots$ by

$$\delta_k = \begin{cases} \delta'_k & \text{for } k_{2s} < k \leq k_{2s+1} \\ \text{arbitrary} & \text{for } k_{2s-1} < k \leq k_{2s} \end{cases} \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Then, the function αq^x is also uniformly distributed.

Proof. Let us first estimate the sum

$$S_N = \sum_{x=k_{2\nu}+1}^N e^{2\pi i m \alpha q^x} \quad (m \geq 1 - \text{integer}), \quad (10)$$

where $k_{2\nu} < N \leq k_{2\nu+1} - r_\nu$ and $r_\nu \rightarrow \infty$ as ν increases without bound. From the definition of α , it follows that on the summation interval

$$\{\alpha q^x\} = \{\alpha' q^x\} + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}, \quad |\theta_x| \leq 1.$$

Thus,⁵

$$\begin{aligned} |S_N| &= \left| \sum_{x=k_{2\nu}+1}^N e^{2\pi i m \left(\alpha' q^x + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}\right)} \right| \leq \left| \sum_{x=k_{2\nu}+1}^N e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \sum_{x=k_{2\nu}+1}^N \left| 1 - e^{2\pi i m \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}} \right|, \\ |S_N| &\leq \left| \sum_{x=1}^{k_{2\nu}} e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \left| \sum_{x=1}^N e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \frac{N - k_{2\nu}}{q^{r_\nu}} \cdot 2\pi m. \end{aligned}$$

Using the definition of r_ν and the fact that $\alpha' \in L$, we obtain from this

$$S_N = o(N).$$

To estimate the sum

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x},$$

we define s by the condition $k_{2s-1} \leq P < k_{2s+1}$. There are two possible cases:

$$P \leq k_{2s} + k_{2s-2} \quad \text{and} \quad P > k_{2s} + k_{2s-2}.$$

⁵Translator's note: In the original manuscript the second sum was defined as $\sum_{x=k_{2\nu}+1}^N e^{2\pi i m \alpha' q^x}$.

In the first case:

$$\left| \sum_{x=1}^P \right| = \left| \sum_1^{k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-1}-k_{2s-2}+1}^P \right| \leq k_{2s-2} + \left| \sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} \right| + P - k_{2s-1} + k_{2s-2}.$$

And since $P \leq k_{2s} + k_{2s-2}$, we obtain:

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| \leq 3k_{2s-2} + (k_{2s} - k_{2s-1}) + \left| \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} e^{2\pi i m \alpha q^x} \right|.$$

Applying the sum estimate (10) for $N = k_{2s-1} - k_{2s-2}$ with $\nu = s-1$ and using conditions (8), we get:

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| = o(k_{2s-1}) = o(P). \quad (11)$$

In the second case:

$$\left| \sum_{x=1}^P \right| = \left| \sum_1^{k_{2s}} + \sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s-2}} + \sum_{P-k_{2s-2}+1}^P \right| \leq \left| \sum_1^{k_{2s}} \right| + \left| \sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s-2}} \right| + k_{2s-2}.$$

Applying the sum estimate (10) for $N = P - k_{2s}$, $\nu = s$ and the estimate (11) for $P = k_{2s}$, we obtain:

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| = o(k_{2s}) + o(P - k_{2s}) = o(P).$$

Thus, the estimate (11) holds for all P , and by Weyl's criterion [7], the function αq^x is uniformly distributed. \square

Section 2

For every α belonging to the set L , by virtue of the uniform distribution of fractional parts $\{\alpha q^x\}$, we have:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P). \quad (12)$$

We show that, as in the case of the linear function, for all $\alpha \in L$ the estimate (12) cannot be improved.

Theorem 1. *For any positive function $\varepsilon(P)$ satisfying*

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \varepsilon(P) = 0,$$

there exists $\alpha \in L$ such that

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)).$$

Proof. For construction, let $\alpha' = 0.\delta'_1 \dots \delta'_h \dots$ be any number from the set L . Define the numbers k_v by the recurrence relations:

$$k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})], \quad k_{2s+1} = k_{2s}^2, \quad k_1 = 2. \quad (13)$$

Finally, we choose $\alpha = 0.\delta_1 \dots \delta_k \dots$, where

$$\delta_k = \begin{cases} \delta'_k & \text{for } k_{2s} < k \leq k_{2s+1}, \\ q-1 & \text{for } k_{2s-1} < k \leq k_{2s}. \end{cases} \quad (14)$$

The number α satisfies the conditions of Lemma 2 and consequently belongs to the set L .

Suppose that for every $\alpha \in L$ we have

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(P\varepsilon(P)). \quad (15)$$

Applying Lemma 1 for the case $\mu = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} &= \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_{x+1} + \frac{\theta}{q-1} \\ &= \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x + O(1). \end{aligned} \quad (16)$$

Let us compute the sum of fractional parts $\{\alpha q^x\}$ for α constructed according to (14) with $P = k_{2s}$:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1).$$

By our assumption (since $\alpha \in L$), we get

$$\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-1}\varepsilon(k_{2s-1})).$$

Moreover, by (14),

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} (q-1) = k_{2s} - k_{2s-1}.$$

Thus⁶,

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + (k_{2s} - k_{2s-1}) + O(k_{2s-1}\varepsilon(k_{2s-1})).$$

⁶Translator's note: Without loss of generality, we may assume $P\varepsilon(P) \rightarrow \infty$ monotonically, and $\varepsilon(P) \rightarrow 0$ also monotonically.

By (13), $k_{2s} - k_{2s-1} > k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} - 1$, and for sufficiently large s we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} &> \frac{1}{3} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} \\ &> \frac{1}{4} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})} \\ &= \Omega(k_{2s} \cdot \varepsilon(k_{2s})). \end{aligned}$$

This contradiction proves the theorem. \square

Let us now consider the question of the values $\alpha \in L$ for which the sum of fractional parts of the function αq^x is closest to its average value $\frac{P}{2}$.

Theorem 2. *For every function $\varphi(P)$ that tends to infinity arbitrarily slowly as $P \rightarrow \infty$, there exists $\alpha \in L$ such that⁷*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)); \quad (17)$$

but for no $\alpha \in L$ can the estimate (17) be improved to $O(1)$.

Proof. To construct a number α satisfying the conditions of the theorem, we use the systems $\rho'_n(q)$ introduced in Chapter 1 [see (15')]. We choose

$$\alpha = 0. \underbrace{\rho'_1(q) \cdots \rho'_1(q)}_{\psi(1)} \underbrace{\rho'_2(q) \cdots \rho'_2(q)}_{\psi(2)} \cdots \underbrace{\rho'_n(q) \cdots \rho'_n(q)}_{\psi(n)} \underbrace{\rho'_{n+1}(q) \cdots}_{\psi(n)} \quad (18)$$

Here each digit of each $\rho'_n(q)$ is understood as the next digit in the q -ary expansion of α ; adjacent $\rho'_n(q)$ blocks are identical, and the first n digits of $\rho'_{n+1}(q)$ ($n = 1, 2, \dots$) are chosen to coincide with the first n digits of $\rho'_n(q)$. Finally, $\psi(n) > 0$ is an arbitrary monotonic integer-valued function with $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$. Then [see [3], Theorem 5], the function αq^x is uniformly distributed, and consequently $\alpha \in L$.

Let us count the sum of the first P digits in expansion (18). Denote by T_n the total number of digits in (18) up to (but not including) the first occurrence of $\rho'_{n+1}(q)$. Since each $\rho'_n(q)$ consists of q^n digits, we obtain for T_n :

$$T_n = \sum_{v=1}^n \psi(v) q^v. \quad (19)$$

Each of the digits $0, 1, \dots, q-1$ appears q^{n-1} times in the system $\rho'_n(q)$, therefore, the sum of the digits for one system $\rho'_n(q)$ is

$$q^{n-1} \cdot \frac{q(q-1)}{2} = \frac{q-1}{2} \cdot q^n.$$

⁷Translator's note: In the original manuscript the right-hand side of the equality is written as $O(\varphi(P))$, but the proof shows that it should be $o(\varphi(P))$.

Let us define k from the condition $T_k \leq P < T_{k+1}$. Then

$$P = T_k + rq^{k+1} + r_1, \quad 0 \leq r < \psi(k+1), \quad 0 \leq r_1 < q^{k+1}.$$

Denoting the digits in (18) by $\delta_1, \delta_2, \dots$, we get⁸

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \delta_x &= \sum_{x=1}^{T_k} \delta_x + \sum_{x=T_k+1}^{T_k+rq^{k+1}} \delta_x + \sum_{x=T_k+rq^{k+1}+1}^P \delta_x \\ &= \sum_{\mu=1}^k \frac{q-1}{2} \cdot q^\mu \psi(\mu) + r \cdot \frac{q-1}{2} \cdot q^{k+1} + O(q^k) \\ &= \frac{q-1}{2} (T_k + rq^{k+1}) + O(q^k) \\ &= \frac{q-1}{2} P + O(q^k). \end{aligned}$$

By virtue of (16), we now have⁹

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} &= \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x + O(1) \\ &= \frac{P}{2} + O(q^k) \end{aligned} \tag{20}$$

We choose the function $\psi(k)$ to grow sufficiently fast so that the condition $\psi(\sqrt{\ln \varphi(k)}) > k$ is satisfied.

Then¹⁰

$$\psi(\sqrt{\ln \varphi(P)}) > P \geq T_k \geq \psi(k), \quad \sqrt{\ln \varphi(P)} > k, \quad e^{k^2} < \varphi(P).$$

Since $q^k = o(e^{k^2})$, relation (20) becomes

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

And since, by (18), $\alpha \in L$, we obtain the first statement of the theorem.

We now prove the impossibility of improving estimate (17). Indeed, suppose that for some $\alpha \in L$ we have

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(1).$$

Let this α be given by the expansion

$$\alpha = 0.\delta_1\delta_2\dots\delta_k\dots \tag{21}$$

⁸Translator's note: The original was $\sum_{x=1}^P \delta_x = \sum_{x=1}^{T_k} \delta_x + \sum_{x=T_k+1}^{T_k+rq^{k+1}} \delta_x + \sum_{x=T_k+rq^{k+1}+1}^P \delta_x$.

⁹Translator's note: In the original manuscript the last term appears as $O(q)$, which seems incomplete, possibly due to a typographical or printing error. We have written it here as $O(q^k)$.

¹⁰Translator's note: The original manuscript says $\ln \sqrt{\varphi(P)} > k, \quad e^{k^2} < \varphi(P)$.

Then, by (16), we obtain

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{P}{2} = O(1),$$

that is, there exists M such that for all P ,

$$\left| \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{P}{2} \right| < M. \quad (22)$$

However, from $\alpha \in L$ it follows that the fractional parts of αq^x are dense in $(0,1)$, so in the expansion (21) for any integer N there will occur a group of N consecutive digits equal to $q-1$. Let such a group start at $k = P_0 + 1$. Choose $N = 4M$ and set $P = P_0 + N$.

Then,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{P}{2} &= \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P_0} \delta_x + 4M - \frac{P_0 + 4M}{2} \\ &= \left(\frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P_0} \delta_x - \frac{P_0}{2} \right) + 2M > M, \end{aligned}$$

which contradicts (22). Thus, the estimate (17) cannot be improved, which completes the proof of Theorem 2. \square

Remark. For almost all values of α , the order of the difference $\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2}$ is equal to $\sqrt{P \ln \ln P}$.

Indeed, it follows directly from the results of A. Ya. Khinchin [2] that the order of the difference

$$\sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{q-1}{2} P$$

for almost all α is $\sqrt{P \ln \ln P}$. However, by Lemma 1, for $\mu = 1$,

$$\sum_{x=1}^P \{xq^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x + O(1).$$

Combining these results, we arrive at the aforementioned statement. Let C denote the set of irrational numbers in the interval $(0,1)$, and let us compare the theorems for linear and exponential functions.

1°. For every $\alpha \in C$ (and correspondingly $\alpha \in L$),

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P),$$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P),$$

where for all α belonging to C and, respectively, L , these estimates cannot be improved.

2°. There exists α in C and, respectively, in L such that

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P),$$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

where $\varphi(P) \rightarrow \infty$ arbitrarily slowly; further improvement of these estimates is impossible.

The results 1° and 2° suggest that the average deviation of $\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\}$ from $\frac{P}{2}$ would be smaller than for the linear function. However, as the remark shows, the opposite is true:

3°. For almost all α , the deviation of the sum

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} \text{ from } \frac{P}{2}$$

is characterized by the function $\sqrt{P \ln \ln P}$, and thus is significantly larger than the corresponding deviation of the sum $\sum_{x=1}^P \{\alpha x\}$ (which, by (3) and (4), is characterized by the function $\ln P$).

Section 3

As shown in [4], from the uniform distribution of the function αq^x ($q \geq 2$ is an integer), it follows that for any integer $\mu \geq 1$, the function $\alpha q^{\mu x}$ is also uniformly distributed. Thus, if for any integer $m \neq 0$, the estimate of the trigonometric sum

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^{\mu x}} = o(P) \tag{23}$$

holds for $\mu = 1$, then it also holds for all integers $\mu \geq 1$.

Let us consider whether the sums of fractional parts have a similar property.

Suppose that $P \rightarrow \infty$ and $\varphi(P) \rightarrow \infty$ arbitrarily slowly, and that α is constructed as in Theorem 2. Then for $\mu = 1$,

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)). \tag{24}$$

We show that, unlike the Weyl sums (23), from the validity of the equality (24) for $\mu = 1$ it does not follow that it holds for all $\mu \geq 1$.

Theorem 3. *Whatever positive functions $\varepsilon(P)$ and monotonic¹¹ $\varphi(P)$ may be, tending respectively to zero and to infinity arbitrarily slowly as $P \rightarrow \infty$, there exists $\alpha \in L$ for which*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)) \quad \text{and} \quad \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)).$$

Proof. Let the integers $k_1 < k_2 < \dots$ satisfy the conditions

$$\varphi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + \left\lfloor k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} \right\rfloor, \quad k_1 = 2, \quad (25)$$

and let $\alpha' = 0, \delta'_1, \dots, \delta'_k, \dots$ be constructed as in Theorem 2. Choose $\alpha = 0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$, where

$$\delta_k = \begin{cases} \delta'_k & \text{for } k_{2s} < k \leq k_{2s+1}, \\ 0 & \text{for even } k \text{ in the interval } (k_{2s-1}, k_{2s}], \\ q-1 & \text{for odd } k \text{ in the interval } (k_{2s-1}, k_{2s}]. \end{cases}$$

From Lemma 2 it follows that the function αq^x is uniformly distributed. Let us estimate the sum of fractional parts

$$S_1 = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\}.$$

Choose s such that $k_{2s-1} \leq P < k_{2s+1}$ and first consider the case $P \leq k_{2s}$:

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s-1}+1}^P \{\alpha q^x\}.$$

Applying Lemma 1 with $\mu = 1$ and using the definition of δ_k , we obtain

$$\begin{aligned} S_1 &= O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^P \delta_x \\ &= \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta'_x + \frac{P - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}). \end{aligned}$$

Applying Lemma 1 again¹²:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha' q^x\} + \frac{P - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}) \\ &= \frac{k_{2s-1}}{2} + o(\varphi(k_{2s-1})) + \frac{P - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}). \end{aligned}$$

¹¹Translator's note: Korobov's original formulation does not say monotonic, but he considers it in the proof.

¹²Translator's note: Here the justification of the equality also requires the result given in Theorem 2.

However, by virtue of (25), $k_{2s-2} = o(\varphi(k_{2s-1}))$, so that

$$S_1 = \frac{P}{2} + o(\varphi(k_{2s-1})) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)) \quad (26)$$

Now let $P > k_{2s}$.

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s}+1}^P \{\alpha q^x\}.$$

Applying the estimate (26) to the first sum on the right:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{k_{2s}}{2} + o(\varphi(k_{2s})) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^P \delta_x \\ &= \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^P \delta'_x + o(\varphi(k_{2s})) \\ &= \frac{k_{2s}}{2} + \sum_{x=1}^P \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha' q^x\} + o(\varphi(k_{2s})) \\ &= \frac{P}{2} + o(\varphi(P)). \end{aligned}$$

Combining this result with (26), we obtain for all P

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

To prove the second assertion of the theorem, we choose $P_1 = \left\lfloor \frac{k_{2s-1}}{2} \right\rfloor$, $P_2 = \left\lfloor \frac{k_{2s}}{2} \right\rfloor - 1$ and estimate the sum

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{2x}\}.$$

Suppose that for every P we have

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = O(P\varepsilon(P)). \quad (27)$$

Applying Lemma 1 and (27) with $\mu = 2$:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha q^{2x}\} \\ &= \frac{P_1}{2} + \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2} \right) + O(P_1\varepsilon(P_1)). \end{aligned}$$

From the definition of δ_k and the choice of P_1 and P_2 , it follows that

$$\sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} = (P_2 - P_1)(q-1), \quad \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2} = 0.$$

Thus,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{P_1}{2} + \frac{q}{q+1}(P_2 - P_1) + O(P_1\varepsilon(P_1)) \\ &= \frac{P_2}{2} + \frac{q-1}{q+1}(P_2 - P_1) + O(k_{2s-1}\varepsilon(k_{2s-1})). \end{aligned}$$

Using the definition of k_v , we obtain for sufficiently large s

$$\begin{aligned} S_2 - \frac{P_2}{2} &> \frac{1}{3} \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-1}\varepsilon(k_{2s-1})) \\ &> \frac{1}{7} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} \\ &= \Omega(P_2\varepsilon(P_2)), \end{aligned}$$

which contradicts assumption (27). \square

Now, let $\varphi(P)$ still tend to infinity arbitrarily slowly as $P \rightarrow \infty$. The question arises: does there exist some $\alpha \in L$ such that for all integers $\mu \geq 1$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P))?$$

The answer is given by the following theorem.

Theorem 4. *Whatever the function $\varphi(P)$ may be, with P increasing without bound and tending to infinity arbitrarily slowly, there exists $\alpha \in L$ such that for all integers $\mu \geq 1$ we have*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)). \quad (28)$$

Proof. Choose

$$\alpha = 0, \underbrace{r_1 \dots r_1}_{\psi(1)} \underbrace{r_2 \dots r_2}_{\psi(2)} \dots \underbrace{r_n \dots r_n}_{\psi(n)} \underbrace{r_{n+1} \dots}_{\psi(n+1)}$$

where $\psi(k)$ is a monotonic function satisfying the condition $\psi(\sqrt{\ln \varphi(k)}) > k$, and r_n are groups of digits of the form

$$\underbrace{\underbrace{\rho'_n \rho'_n \dots \rho'_n}_0}_{n!} \underbrace{\underbrace{\rho'_n \rho'_n \dots \rho'_n}_0}_{n!} \dots \underbrace{\underbrace{\rho'_n \rho'_n \dots \rho'_n}_0}_{n!} \underbrace{\underbrace{\overline{\rho}_n \rho'_n \rho'_n \dots \rho'_n}_{n!}}_{n!} \underbrace{\underbrace{\overline{\rho}_n \rho'_n \rho'_n \dots \rho'_n}_{n!}}_{n!} \dots \underbrace{\underbrace{\overline{\rho}_n \rho'_n \rho'_n \dots \rho'_n}_{n!}}_{n!}$$

In total $n!$ times In total $n!$ times

and $\overline{\rho}_n$ denotes ρ'_n without its first digit. It is easy to verify, for instance by verbatim repetition of the reasoning from Theorem 5 in [3], that $\alpha \in L$.

To estimate the sum (28), we apply Lemma 1.

$$S_\mu = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} = \frac{1}{q^\mu - 1} \sum_{v=1}^{\mu} q^{\mu-v} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + O(1). \quad (29)$$

Denote by t_n the number of digits in r_n . Clearly,

$$t_n = (n!q^n + 1)n! + (n!q^n - 1)n! = 2(n!)^2q^n.$$

Thus, we have T_k – the number of digits in the expansion of α up to the first occurrence of r_{k+1} :

$$T_k = \sum_{n=1}^k 2(n!)^2q^n \cdot \psi(n).$$

Let us define k by the condition $T_k \leq \mu P < T_{k+1}$; then

$$\begin{aligned} \mu P &= T_k + 2N(k+1)!^2q^{k+1} + R, \\ 0 \leq N &< \psi(k+1), \quad 0 \leq R \leq 2(k+1)!^2q^{k+1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Let v be an arbitrary integer in the interval $1 \leq v \leq \mu$ and $\mu \leq n$. We mark digits in r_n in an arithmetic progression with difference μ , starting from the v -th digit. Thus, the v -th, $v + \mu$ -th, $v + 2\mu$ -th digits, etc., will be marked. Let us calculate the sum of the marked digits. First, consider the collection of digits of the form

$$\underbrace{\underbrace{\rho'_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_n 0 \quad \underbrace{\rho'_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_n 0 \quad \cdots \quad \underbrace{\rho'_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_n 0}_{\text{Exactly } \mu \text{ times}} \quad (31)$$

The number of digits in each group $\underbrace{\rho'_n \cdots \rho'_n}_n$ is a multiple of μ . Consequently, in the second such group, the first marked digit will be the $v - 1$ -th, and so on, until (before the $v + 1$ -th group) the zero separating these groups is marked.

In the $v + 1$ -th group, the μ -th digit will be marked, followed by the $\mu - 1$ -th, and so on, up to the $v + 1$ -th in the last group.

Thus, the collection of marked digits coincides with the collection of all digits contained in the group $\rho'_n \cdots \rho'_n 0$. Since the sum¹³ of digits in ρ'_n equals $q^n \frac{q-1}{2}$, the sum of digits marked in (31) will be

$$\frac{1}{2} n! q^n (q-1). \quad (32)$$

The first half of r_n contains $\frac{n!}{\mu}$ groups of (31), hence the sum of digits in this half equals

$$\frac{1}{2\mu} n!^2 q^n (q-1).$$

Let us now consider the collection of digits

$$\underbrace{\underbrace{\overline{\rho}_n \rho'_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_n \quad \underbrace{\overline{\rho}_n \rho'_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_n \quad \cdots \quad \underbrace{\overline{\rho}_n \rho'_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_n}_{\text{In total } \mu \text{ times}} \quad (33)$$

¹³Translator's note: This happens because in ρ'_n each digit between 0 and $q - 1$ appears exactly $\frac{q^n}{q}$ times.

Thus, the sum of all digits in ρ'_n is equal to $\frac{q^n}{q} \sum_{j=0}^{q-1} j = \frac{q^n}{q} \frac{q(q-1)}{2} = q^n \frac{q-1}{2}$.

In the first $\overline{\rho}_n$, the first marked digit is the v -th, in the second $\overline{\rho}_n$ the $v + 1$ -th digit, and so on up to the $v - 1$ -th digit in the last $\overline{\rho}_n$. Clearly, the sum of digits marked in (33) coincides with the sum of digits in the group $\underbrace{\overline{\rho}_n \rho'_n \rho'_n \cdots \rho'_n}_{n!}$. We only use¹⁴ those ρ'_n systems that begin

with zero. Then the digit omitted in $\overline{\rho}_n$ equals zero, and the sum of digits in $\overline{\rho}_n \rho'_n \dots \rho'_n$ will match (32).

Thus, the sums of marked digits in the first and second halves of r_n are equal, and the total sum of all marked digits in r_n will be

$$\frac{1}{\mu} n!^2 q^n (q - 1).$$

Let us proceed to estimate¹⁵ the inner sum in (29):

$$\sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} = \frac{q-1}{\mu} \left(\mu!^2 q^\mu \psi(\mu) + \cdots + k!^2 q^k \psi(k) + (k+1)!^2 q^{k+1} N \right) + O(R).$$

Using (30), we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} &= \frac{q-1}{2} P + O(R), \\ S_\mu &= \frac{1}{q^\mu - 1} \cdot \frac{q-1}{2} P \sum_{v=1}^{\mu} q^{\mu-v} + O(R) \\ &= \frac{P}{2} + O(R). \end{aligned} \tag{34}$$

However, $\mu P \geq T_k \geq 2k!^2 q^k \psi(k)$, and for sufficiently large k , $\psi(k) < P$.

Further, as in Theorem 2, we obtain $e^{k^2} < \varphi(P)$.

Thus,

$$R < 2(k+1)!^2 q^{k+1} = o(e^{k^2}) = o(\varphi(P))$$

and from (34) we obtain

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)) \quad (\mu = 1, 2, \dots) \tag{35}$$

□

Let us now consider values $\alpha \in L$ for which the sum of fractional parts $\{\alpha q^x\}$ deviates significantly from the mean value $\frac{P}{2}$. According to Theorem 1, for any positive function $\varepsilon(P)$ that tends to zero arbitrarily slowly as $P \rightarrow \infty$, there exists $\alpha \in L$ such that for $\mu = 1$ we

¹⁴Translator's note: There is no loss of generality in this assumption.

¹⁵Translator's note: We believe there should be an additional error term $O((q-1) \sum_{j=1}^{\mu-1} \psi(j) |r_j|) = O((q-1)\mu!q^\mu)$. However, it can be interpreted as included in the error term $O(R)$, which is $O((k+1)!^2 q^{k+1})$.

have

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)).$$

Does this equality hold for all $\mu > 1$ if it holds for $\mu = 1$? The following theorem gives a negative answer:

Theorem 5. *No matter how slowly the functions $\varphi(P) \rightarrow \infty$ and $\varepsilon(P) \rightarrow 0$ as $P \rightarrow \infty$, there exists $\alpha \in L$ such that*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)) \quad \text{and} \quad \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

Proof. Let $\alpha' = 0, \delta'_1 \dots, \delta'_k \dots$ satisfy relation (35) ($\alpha' \in L$). Choose integers $k_1 < k_2 < \dots$ satisfying the conditions

$$\varphi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}], \quad k_1 = 2.$$

Construct $\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \dots$, where for even and odd k in the interval (k_{2s-1}, k_{2s}) , the sequences δ_k coincide respectively with the periodic sequences

$$\underbrace{q-1, q-1, q-1, 1, q-1, q-1, q-1, 1 \dots}_{(k_{2s-1} < k \leq k_{2s}; k \text{ even})}$$

$$\underbrace{q-1, 0, q-2, 0, q-1, 0, q-2, 0 \dots}_{(k_{2s-1} < k \leq k_{2s}; k \text{ odd})}$$

and where for k in the intervals $(k_{2s}, k_{2s+1}]$ we have $\delta_k = \delta'_k$.

By Lemma 2, $\alpha \in L$. Let us estimate the sum

$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} \\ \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} &= \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1) \\ &= O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1} \left(\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \delta'_x - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \delta'_x \right) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x \\ &= O(k_{2s-2}) + \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x \\ &= \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + o(\varphi(k_{2s-1})). \end{aligned}$$

Breaking the sum $\sum \delta_x$ into groups of eight terms and using the definition of δ_k , we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} &= \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \cdot \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} \cdot 5(q-1) + o(\varphi(k_{2s-1})) \\ &= \frac{k_{2s}}{2} + \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} + o(\varphi(k_{2s-1})) \end{aligned}$$

Due to the arbitrarily slow growth of the function $\varphi(k)$, we can consider $\varphi(k) = o(P\varepsilon(P))$ for $k \leq P$, and consequently,

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} &= \frac{1}{8} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} + o(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) \\ &> \frac{1}{9} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})}, \end{aligned}$$

and we obtain the first statement of the theorem:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} = \Omega(k_{2s} \varepsilon(k_{2s})) \quad (P = k_{2s}).$$

Now let us estimate the sum

$$S_2 = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\}. \quad (36)$$

Let s be determined by the condition¹⁶ $k_{2s-1} \leq 2P < k_{2s+1}$.

First consider the case $2P \leq k_{2s}$. Let $P_1 = \left\lfloor \frac{k_{2s-2}}{2} \right\rfloor$ and $P_2 = \left\lfloor \frac{k_{2s-1}}{2} \right\rfloor - 1$.

Splitting the summation interval in (36) and applying Lemma 1 with $\mu = 2$, we obtain

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_2+1}^P \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_2+1}^P \delta_{2x+2} \right) + O(1). \end{aligned}$$

Splitting the last two sums into groups of four terms each, we obtain:

$$\begin{aligned} S_2 &= O(P_1) + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1} (q(2q-3) + 3q-2) \frac{P-P_2}{4} \\ &= \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1) \\ &= \frac{P_2}{2} + o(\varphi(P_2)) + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1). \end{aligned}$$

¹⁶Translator's note: The original manuscript says $k_{2s+1} \leq 2P < k_{2s+1}$, but the leftmost term should be k_{2s-1} .

Thus, for $k_{2s-1} \leq 2P \leq k_{2s}$:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} = \frac{P}{2} + O(P_1) + o(\varphi(P_2)) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)). \quad (37)$$

Now let $2P > k_{2s}$; denote $P_3 = \left\lfloor \frac{k_{2s}}{2} \right\rfloor - 1$. Then¹⁷:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} = \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2 - 1} \left(q \sum_{x=P_3+1}^P \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_3+1}^P \delta_{2x+2} \right) + O(1).$$

Using (37), we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} &= \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \sum_{x=1}^P \{\alpha' q^{2x}\} - \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha' q^{2x}\} \\ &= \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \frac{P}{2} + o(\varphi(P)) - \frac{P_3}{2} \\ &= \frac{P}{2} + o\left(\varphi\left(\frac{P}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Therefore, in all cases:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

which completes the proof of the theorem. \square

As before, the question arises: do there exist any numbers $\alpha \in L$ such that for all integers $\mu \geq 1$ the following holds:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)),$$

where $\varepsilon(P)$ tends to zero arbitrarily slowly as P increases without bound? It is easy to show that the numbers α constructed in Theorem 1 possess this property.

Theorem 6. *For any positive function $\varepsilon(P) \rightarrow 0$ as $P \rightarrow \infty$, there exists $\alpha \in L$ such that for all integers $\mu \geq 1$,*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)).$$

Proof. Let α be chosen as in Theorem 1. 5 Suppose that for some $\mu \geq 1$ we have

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = O(P\varepsilon(P)).$$

¹⁷Translator's note: In the original manuscript, in the right side of the equation, the subindex x of the second sum starts at $P_2 + 1$ but it should start from $P_3 + 1$.

Let $P_1 = \left\lfloor \frac{k_{2s-1}}{\mu} \right\rfloor$ and $P_2 = \left\lfloor \frac{k_{2s}}{\mu} \right\rfloor - 1$.

Using Lemma 1, we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} &= \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{\mu x}\} + \frac{1}{q^\mu - 1} \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{\mu x+\nu} + O(1) \\ &= \frac{P_1}{2} + O(P_1 \cdot \varepsilon(P_1)) + \frac{q-1}{q^\mu - 1} (P_2 - P_1) \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu}. \end{aligned}$$

From this we get

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P_2}{2} &= \frac{P_2 - P_1}{2} + O(P_1 \cdot \varepsilon(P_1)) \\ &= \frac{k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}}{2\mu} + O(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) \\ &> \frac{1}{3\mu} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})} \\ &= \Omega(P_2 \varepsilon(P_2)) \end{aligned} \tag{38}$$

But (38) contradicts our initial assumption, thus completing the proof of the theorem. \square

References

- [1] Khinchin A. Y. A theorem on continued fractions with arithmetic applications. *Mathematische Zeitschrift*, 18:289–306, 1923. Original title: Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen.
- [2] Khinchin A. Y. On dyadic fractions. *Mathematische Zeitschrift*, 18:109–116, 1923. Original title: Über dyadische Brüche.
 ———— On a Theorem of Probability Theory, *Fundamenta Mathematicae*, 6:9–20, 1924. Original title: Über einen Satz der Warscheinlichkeitsrechnung.
 ———— Asymptotic Laws of Probability Theory, Chap. V, Moscow–Leningrad, 1936. Original title: Асимптотические законы теории вероятностей.
- [3] Korobov N. M. On certain questions of uniform distribution. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR, Mathematical Series*, 14:215–238, 1950. Original title: О некоторых вопросах равномерного распределения, *Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем.*, 14:215–238, 1950.
- [4] Shapiro-Pyateckii I. I. On distribution laws of fractional parts of exponential functions. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR, Mathematical Series*, 15:47–52, 1951. Original title: О законах распределения дробных долей показательной функции, *Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем.*, 15:47–52, 1951.

- [5] Ostrowski A. Remarks on the theory of diophantine approximations. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 1:77–98, 1921. Original title: Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen.
- [6] Good I. J. Normal recurring decimals. *Journal of the London Mathematical Society*, 21(83):167–169, 1946.
- [7] Weyl H. On the uniform distribution of numbers modulo one. *Mathematische Annalen*, 77:313–352, 1916. Original title: Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins.
- [8] de Bruijn N. G. A combinatorial problem. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 49(7):758–764, 1946. *Indagationes Mathematicae* 8:461–467, 1946.

Copy of the original article translated in this work:

Н. М. Коробов, “Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей”, Известия АН СССР. Серия математическая, 15:1 (1951), 17–46.

Translation to English:

N. M. Korobov, “Normal Periodic Systems and Their Applications to the Estimation of Sums of Fractional Parts”, Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Mathematical Series, 15:1 (1951), 17–46.

очевидно совпадает с совокупностью всех возможных трехзначных чисел (1)'.

Легко проверить, что в системе счисления с основанием 4 двузначные числа, получающиеся при рассмотрении всех пар соседних знаков семнадцатизначной последовательности

$$22330010203112132, \quad (3)$$

совпадают с совокупностью всех возможных двузначных чисел:

$$00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33.$$

Нормальной периодической системой или *системой* $\rho_n(q)$ назовем последовательность из t знаков

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n} \dots \delta_t \quad (4)$$

($t = q^n + n - 1$; δ_v — целые из интервала $0 \leq \delta_v \leq q - 1$), обладающую тем свойством, что совокупность n -значных чисел

$$\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n} \quad (k = 0, 1, \dots, q^n - 1),$$

получающихся из соседних знаков последовательности (4), совпадает с совокупностью всех возможных n -значных чисел (1) в системе счисления с основанием q .

Последовательности (2) и (3), очевидно, представляют собой примеры систем $\rho_3(2)$ и $\rho_2(4)$.

Существование нормальных периодических систем для любого n было доказано Гудом (6). Гуду принадлежит также пример системы $\rho_6(2)$.

Примеры систем $\rho_n(q)$ при малых значениях n и q ($n < 5$, $q = 2$) строятся легко. Нахождение систем $\rho_5(2)$ несколько труднее. Без знания общего метода построения систем $\rho_n(q)$ найти примеры $\rho_n(q)$ для $n > 5$ весьма трудно уже при $n = 6$ и $q = 2$. Такой метод, дающий вместе с тем доказательство существования систем $\rho_n(q)$, отличное от доказательства Гуда, был получен в моей работе (3). Для случая двоичной системы счисления этот метод состоит в следующем:

Метод А (для $q = 2$). Первые n знаков выбираем равными единице. Далее приписываем справа ноль до тех пор, пока получающиеся при этом новые n -значные числа встречаются впервые. Единицу приписываем лишь в том случае, когда приписывание нуля приводит к уже встречавшемуся n -значному числу. Приписывание заканчиваем, когда любой новый знак приводит к n -значному числу, которое уже встречалось.

Таким образом, построение $\rho_n(2)$ методом А представляет собой рекуррентный процесс, позволяющий по уже выбранным $k + n - 1$ знакам

$$\delta_1 \dots \delta_n \dots \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1) \quad (5)$$

выбирать следующий знак δ_{k+n} :

$$\delta_{k+n} = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} 0 \neq \delta_{v+1} \dots \delta_{v+n} \quad (v = 0, 1, \dots, k-1), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство того, что невозможность дальнейшего приписывания знаков в последовательности (5) наступает лишь когда выписанные зна-

ки образуют систему $\rho_n(2)$, было проведено в (3). Здесь мы получим это доказательство как следствие из более общего метода построения систем $\rho_n(q)$ — метода A_1 .

С помощью метода A без труда строятся системы $\rho_5(2)$, $\rho_6(2)$ и т. д.

$$\rho_5(2) = 111110000010001100101001110101101111,$$

$$\rho_6(2) = 111111000000100001100010100011100101011001111010111101111111,$$

$$\rho_7(2) = 111111100000001000001100001010000111000100100010110001101000111100100110010101001011100110110011101001111010101101011110110111111111.$$

§ 2. Метод A_1 . Выберем первые n знаков $\delta_1, \dots, \delta_n$ произвольно. Знаки $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}$ и т. д. будем приписывать по следующему общему правилу: пусть уже выписан $k + n - 1$ знак

$$\delta_1 \dots \delta_n \dots \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1). \quad (6)$$

Рассмотрим $n - 1$ -значное число $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1}$, стоящее на конце последовательности (6). Пусть последние μ знаков этого числа ($0 \leq \mu \leq n - 1$) образуют наибольшую группу, совпадающую с группой начальных знаков $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_\mu$. Выберем теперь знак δ_{k+n} или любым, отличным от $\delta_{\mu+1}$, но так, чтобы получающееся при этом новое n -значное число $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \delta_{k+n}$ не совпадало ни с одним из уже выписанных в (6) n -значных чисел $\delta_{v+1} \dots \delta_{v+n}$ ($v = 0, 1, \dots, k - 1$), или равным $\delta_{\mu+1}$, если приписывание любого знака, отличного от $\delta_{\mu+1}$, приводит к уже встречавшемуся в (6) n -значному числу. Процесс приписывания прекращаем, когда приписывание любого знака приводит к уже встречавшемуся n -значному числу.

Пусть невозможность дальнейшего приписывания знаков в последовательности (6) наступила при $k = \tau$ ($\tau \geq 1$). Очевидно, что все n -значные числа, которые встретятся в получившейся при этом последовательности

$$\delta_1 \dots \delta_n \dots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}, \quad (7)$$

будут различны. Однако остается неясным, не могло ли приписывание новых знаков закончиться раньше, чем в (7) будет выписано каждое из существующих n -значных чисел.

Таким образом, чтобы доказать совпадение последовательности (7), построенной методом A_1 , с некоторой системой $\rho_n(q)$, достаточно проверить, что среди n -значных чисел

$$\delta_{v+1} \dots \delta_{v+n} \quad (v = 0, 1, \dots, \tau - 1), \quad (8)$$

содержащихся в последовательности (7), встретится каждое из существующих n -значных чисел (1).

Обозначим через β и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ величины, каждая из которых, независимо от остальных, может принимать любое из q значений $0, 1, \dots, q - 1$. Покажем сперва, что в последовательности (7) встретится любое число вида

$$\beta_{n-1} \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \quad (\beta_{n-1} = 0, 1, \dots, q - 1). \quad (9)$$

Действительно, $n - 1$ -значное число $\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}$, которым заканчивается последовательность (7), встречается в ней с любым знаком справа (иначе процесс приписывания не был бы прекращен), следовательно, это число встречается в (7) ровно $q + 1$ раз. При этом каждый раз к нему слева должны примыкать различные знаки, что возможно лишь в том случае, если один раз это число встретится в начале последовательности (7), т. е. если

$$\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}. \quad (10)$$

Итак, в (7) встречается любое число вида $\beta_{n-1} \delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}$ и, в силу (10), любое число вида $\beta_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-1}$ ($\beta_{n-1} = 0, 1, \dots, q - 1$).

Разобьем теперь все n -значные числа на классы R_v^n ($v = 0, 1, \dots, n$), относя к классу R_v^n все числа, у которых наибольшая группа последних знаков, совпадающих со знаками $\delta_1 \delta_2 \dots$, состоит из v знаков. Числа класса R_v^n будем записывать в виде $\beta'_v \dots \beta'_{n-1} \delta_1 \dots \delta_v$. (Заметим, что не обязательно всякое число вида $\beta'_v \dots \beta'_{n-1} \delta_1 \dots \delta_v$ принадлежит классу R_v^n — оно может принадлежать к классу $R_{v_1}^n$, где $v_1 > v$.)

Класс R_n^n состоит, очевидно, из единственного числа $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta_n$; с этого числа начинается последовательность (7). Как было показано выше, все числа вида $\beta_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-1}$ также содержатся в (7). Таким образом, доказано, что все числа классов R_n^n и R_{n-1}^n встречаются в последовательности (7). Применим индукцию. Допустим, что в (7) содержатся все числа класса R_{n-s}^n ($s \geq 1$). Покажем, что тогда в (7) содержатся также все числа класса $R_{n-(s+1)}^n$.

Рассмотрим $n - 1$ -значные числа

$$\beta''_{n-s} \dots \beta''_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)},$$

принадлежащие классу $R_{n-(s+1)}^{n-1}$. Каждое такое число встретится среди $n - 1$ -значных чисел, с которых начинаются n -значные числа

$$\beta'_{n-s} \dots \beta'_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \delta_{n-s}$$

класса R_{n-s}^n . По индукционному предположению, в последовательности (7) содержится любое n -значное число вида

$$\beta'_{n-s} \dots \beta'_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \delta_{n-s},$$

а значит и всякое число вида

$$\beta''_{n-s} \dots \beta''_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \delta_{n-s}. \quad (11)$$

Согласно методу A_1 , каждое из чисел (11) могло быть выписано в последовательности (7) лишь в том случае, когда в (7) уже встречалось любое число вида

$$\beta''_{n-s} \dots \beta''_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \beta \quad (\beta \neq \delta_{n-s}). \quad (12)$$

Из (11) и (12) получаем, что каждое $n - 1$ -значное число

$$\beta''_{n-s} \dots \beta''_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \quad (13)$$

класса $R_{n-(s+1)}^{n-1}$ встречается в (7) равно q раз. Ни одно из этих чисел не стоит в начале последовательности (7) (так как в начале (7) стоит число $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$, принадлежащее классу R_{n-1}^{n-1} , отличному от класса

$R_{n-(s+1)}^{n-1}$ при $s \geq 1$). Но тогда каждое $n-1$ -значное число (13) встретится в последовательности (7) с любым знаком слева и, следовательно, в (7) содержатся все n -значные числа вида

$$\beta_{n-(s+1)} \beta_{n-s}'' \dots \beta_{n-1}'' \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)},$$

а вместе с тем и все числа класса $R_{n-(s+1)}^n$.

Итак, последовательность (7) содержит все классы $R_n^v, v = n, n-1, \dots, 1, 0$ (а значит и все n -значные числа) и, таким образом, представляет собой некоторую систему $\rho_n(q)$.

Отсюда непосредственно следует, что и метод A , указанный выше для случая $q = 2$, приводит к построению систем $\rho_n(2)$, так как он является частным случаем метода A_1 . (Легко проверить, что метод A для $q = 2$ получается из метода A_1 при $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta_n = 11 \dots 11$.)

§ 3. Покажем, что не всякая система $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_1 .

Прежде всего заметим, что для каждой системы $\rho_n(q)$

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} \tag{14}$$

справедливо равенство

$$\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}, \tag{10}$$

доказанное ранее [см. (10)] для систем $\rho_n(q)$, полученных методом A_1 . Действительно, $n-1$ -значное число $\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}$, стоящее на конце системы (14), встречается в ней еще q раз (так как система (14), являясь системой $\rho_n(q)$, содержит каждое n -значное число вида $\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} \beta$, где $\beta = 0, 1, \dots, q-1$). Дальше доказательство совпадает с доказательством (10).

В соответствии с (10) будем в дальнейшем системы $\rho_n(q)$ записывать в виде

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \mid \delta_1 \dots \delta_{n-1} \text{ или } \delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1} \quad (\tau = q^n), \tag{15}$$

причем систему из первых q^n знаков

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \tag{15'}$$

будем называть *системой* $\rho'_n(q)$. Произведем в $\rho'_n(q)$ произвольную циклическую перестановку знаков:

$$\delta_{k+1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_k. \tag{16}$$

Припишем в (16) справа $n-1$ -значное число $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1}$; тогда получим последовательность

$$\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_k \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1}. \tag{17}$$

Эта последовательность содержит все n -значные числа, встречающиеся в (15), и, следовательно, также представляет собой некоторую систему $\rho_n(q)$.

Две системы $\rho_n(q)$ будем называть *существенно различными*, если соответствующие им системы $\rho'_n(q)$ никакой циклической перестановкой

нельзя перевести друг в друга. Системы считаем просто *различными*, если не все их знаки соответственно совпадают. Так, например, существует всего 4 различных системы $\rho_2(2)$:

$$1100 \vdots 1, \quad 1001 \vdots 1, \quad 0011 \vdots 0, \quad 0110 \vdots 0.$$

Среди этих систем нет существенно различных. Системы $\rho_3(2)$

$$01000111 \vdots 01 \text{ и } 11100010 \vdots 11$$

не только различны, но и существенно различны; системы (15) и (17) не будут существенно различны.

Как показано в (8), число существенно различных систем $\rho_n(2)$ для всякого n равно 2^r , где $r = 2^{n-1} - n$. Обозначим через T_n число существенно различных систем $\rho_n(2)$, которые могут быть получены методом A_1 . Так как в методе A_1 при $q = 2$ все знаки, начиная с δ_{n+1} , определяются единственным образом, то число различных систем $\rho_n(2)$, получаемых методом A_1 , равно числу различных n -значных чисел $\delta_1 \dots \delta_n$, т. е. равно 2^n . Некоторые из этих 2^n систем могут не быть существенно различными, так что

$$T_n \leq 2^n.$$

Но при $n > 4$

$$2^n < 2^r \quad (r = 2^{n-1} - n)$$

и, следовательно,

$$T_n < 2^n \quad (n \geq 5).$$

Таким образом, для $n \geq 5$ методом A_1 нельзя получить все системы $\rho_n(q)$. (Уже при $n = 5$ из 2048 существующих существенно различных систем $\rho_5(2)$ при помощи метода A_1 можно получить не больше 32 систем.)

§ 4. Возникает вопрос о методе, который позволил бы построить любую из существующих систем $\rho_n(q)$.

Изложению такого метода предположим несколько **вспомогательных** предложений. Рассмотрим систему $\rho_n(q)$:

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1} \quad (\tau = q^n). \quad (18)$$

Пусть $\delta_{k1}\delta_{k2} \dots \delta_{kn-1}$ — произвольное $n-1$ -значное число, отличное от $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$. Это число встречается в системе (18) ровно q раз. Каждый раз знаком, примыкающим к нему справа, число $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}$ дополняется до некоторого n -значного числа. Пусть $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1} \delta_{kn}$ — последнее (считая слева направо) из этих n -значных чисел. Назовем полученную таким образом совокупность из $s = q^{n-1} - 1$ n -значных чисел

$$\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1} \delta_{kn} \quad (k = 1, 2, \dots, q^{n-1} - 1) \quad (19)$$

системой, соответствующей данному $\rho_n(q)$. Назовем, далее, особой системой всякую совокупность n -значных чисел

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11}\delta_{12} \dots \delta_{1n-1}\delta_{1n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{k1}\delta_{k2} \dots \delta_{kn-1}\delta_{kn} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{s1}\delta_{s2} \dots \delta_{sn-1}\delta_{ns} \end{array} \right\} (s = q^{n-1} - 1) \quad (20)$$

(δ_{ik} — целые из интервала $0 \leq \delta_{ik} \leq q - 1$), для которой выполняются условия:

(а) все $n - 1$ -значные числа $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}$ ($k = 1, 2, \dots, q^{n-1} - 1$) различны, причем ни одно из них не равно $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$ (таким образом, среди чисел $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}$ встречаются все возможные $n - 1$ -значные числа за исключением числа $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$);

(б) возможно такое расположение строк (20), что (если считать его выполненным) для $k \geq 2$ всякое $n - 1$ -значное число $\delta_{k2} \dots \delta_{kn}$ равно или одному из чисел $\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, k - 1$), или числу $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$.

Так, например, системам $\rho_3(2)$ и $\rho_2(4)$

$$1000101110 \text{ и } 22330010203112132$$

будут соответствовать системы

$$\left. \begin{array}{l} 110 \\ 011 \\ 001 \end{array} \right\} \text{ и } \left. \begin{array}{l} 32 \\ 03 \\ 13 \end{array} \right\}. \quad (21)$$

Системы (21) являются, очевидно, особыми.

ЛЕММА 1. Всякая система (19), соответствующая $\rho_n(q)$, является особой системой.

Согласно определению (19), среди чисел $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}$ встречаются все $n - 1$ -значные числа, отличные от $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$. Таким образом, для проверки свойства (а) надо лишь показать, что в (19) содержится хотя бы одно число вида $\beta\delta_{12} \dots \delta_{1n}$.

Рассмотрим сначала системы $\rho_n(q)$, для которых

$$\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} \neq \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}.$$

Число $\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} \delta_{n-1}$, являясь последним из чисел системы (18), имеющих вид $\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} \beta$, встретится среди чисел системы (19).

Для систем $\rho_n(q)$, в которых

$$\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1},$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \delta_\tau &= \delta_1 = \dots = \delta_{n-1}; & \delta_{\tau-1} &\neq \delta_\tau, \\ \delta_{\tau-1} \delta_1 \dots \delta_{n-2} &\neq \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}. \end{aligned}$$

В случае $p = r$, пользуясь (26), получим

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_r \dots \lambda_r,$$

что снова невозможно, так как система, соответствующая ρ_n , не может содержать чисел, состоящих из одинаковых знаков.

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Каждая из существующих особых систем может быть получена следующим методом:*

Метод В. *В первой строке выписываем любое n -значное число $\delta_{11} \delta_{12} \dots \delta_{1n-1} \delta_{1n}$, не все знаки которого одинаковы. (Таким образом, $\delta_{11} \dots \delta_{1n-1} \neq \delta_{12} \dots \delta_{1n}$.) Все остальные строки, начиная со второй, строим по следующему общему правилу: пусть уже выписано k строк ($k \geq 1$)*

$$\begin{array}{cccc} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n-1} & \delta_{1n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} & \dots & \delta_{kn-1} & \delta_{kn}. \end{array}$$

Рассмотрим $n - 1$ -значные числа

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n}, \delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \quad (v = 1, 2, \dots, k). \quad (27)$$

Назовем допустимыми числами те числа $\mu_1 \dots \mu_{n-1}$ из совокупности (27), для которых $\mu_1 \dots \mu_{n-2} = \delta_{13} \dots \delta_{1n}$, если $\delta_{13} \dots \delta_{1n}$ встречалось среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, k$) меньше $q - 1$ раза, а также те, для которых $\mu_1 \dots \mu_{n-2} \neq \delta_{13} \dots \delta_{1n}$, если $\mu_1 \dots \mu_{n-2}$ встречалось среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, k$) меньше q раз.

Для построения $k + 1$ -й строки выберем $\delta_{k+12} \dots \delta_{k+1n}$ равным любому из допустимых чисел; знак δ_{k+11} выберем так, чтобы число $\delta_{k+11} \dots \delta_{k+1n-1}$ отличалось от любого из чисел (27).

Таким образом, $k + 1$ -я строка построена. Построение методом В считаем законченным, когда построение очередной строки окажется невозможным.

Докажем сперва, что метод В всегда приводит к некоторой особой системе.

Действительно, процесс построения строк не может закончиться из-за невозможности выбрать δ_{k+11} (это следует из выбора допустимых чисел). Таким образом, построение заканчивается из-за невозможности выбрать $\delta_{k+12} \dots \delta_{k+1n}$, т. е. из-за того, что для некоторого $k = s$ группа допустимых чисел не будет содержать ни одного числа.

Выпишем строки, которые удастся построить методом В:

$$\left. \begin{array}{cccc} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n-1} & \delta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \dots & \delta_{kn-1} & \delta_{kn} \\ \delta_{k+11} & \delta_{k+12} & \dots & \delta_{k+1n-1} & \delta_{k+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \dots & \delta_{sn-1} & \delta_{sn} \end{array} \right\}. \quad (28)$$

Так как каждое из чисел $\delta_{k+12} \dots \delta_{k+1n}$ содержится среди чисел (27) ($k = 1, 2, \dots, s - 1$), то можно утверждать, что для системы (28)

выполняется свойство (b). Далее, из метода выбора знаков δ_{k+1} следует, что все $n - 1$ -значные числа

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} \dots \delta_{1n-1} \\ \dots \dots \dots \\ \delta_{s1} \dots \delta_{sn-1} \end{array} \right\} \quad (29)$$

различны и не равны $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$. Таким образом, остается показать, что $s = q^{n-1} - 1$, т. е. что среди чисел (29) содержатся все $n - 1$ -значные числа, кроме $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$.

Рассмотрим числа (27) для $k = s$:

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n} \text{ и } \delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \quad (v = 1, 2, \dots, s). \quad (30)$$

Число $\delta_{12} \dots \delta_{1n-1}$ встречается среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, s$) $q - 1$ или q раз, смотря по тому, совпадает оно с числом $\delta_{13} \dots \delta_{1n}$ или нет (иначе группа допустимых чисел для $k = s$ содержала бы число $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$ и не была бы пустой). Но тогда среди чисел (30) встречается любое число вида

$$\beta_1 \delta_{12} \dots \delta_{1n-1} \quad (\beta_1 = 0, 1, \dots, q - 1).$$

Допустим, что среди чисел (30) встречается любое число вида

$$\beta_i \beta_{i-1} \dots \beta_1 \delta_{12} \dots \delta_{1n-i} \quad (0 \leq \beta_j \leq q - 1; j = 1, 2, \dots, i).$$

Тогда число $\beta_i \dots \beta_1 \delta_{12} \dots \delta_{1n-i-1}$ встречается среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, s$) $q - 1$ или q раз, смотря по тому, совпадает оно с $\delta_{13} \dots \delta_{1n}$ или нет. Следовательно, любое число вида

$$\beta_{i+1} \beta_i \dots \beta_1 \delta_{12} \dots \delta_{1n-(i+1)}$$

также встречается среди чисел (30).

Таким образом, индукцией получаем, что среди чисел (30) встречается каждое число вида $\beta_{n-1} \beta_{n-2} \dots \beta_1$, т. е. каждое $n - 1$ -значное число.

Следовательно,

$$s + 1 = q^{n-1},$$

и система (28) является особой.

Покажем теперь, что методом B можно получить любую из существующих особых систем. Допустим, что особая система

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} \quad \delta_{12} \quad \dots \quad \delta_{1n-1} \quad \delta_{1n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{i1} \quad \delta_{i2} \quad \dots \quad \delta_{in-1} \quad \delta_{in} \\ \delta_{i+11} \quad \delta_{i+12} \quad \dots \quad \delta_{i+1n-1} \quad \delta_{i+1n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{s1} \quad \delta_{s2} \quad \dots \quad \delta_{sn-1} \quad \delta_{sn} \end{array} \right\} \quad (s = q^{n-1} - 1) \quad (31)$$

не может быть получена методом B .

Обозначим через i наибольшее число строк этой системы, построение которых методом B возможно. Так как первая строка системы (31) должна удовлетворить единственному требованию $\delta_{11} \dots \delta_{1n-1} \neq \delta_{12} \dots \delta_{1n}$ — тому же, как и первая строка в методе B , то получим, что $i \geq 1$.

Рассмотрим $(i + 1)$ -ю строку системы (31). Число $\delta_{i+11} \dots \delta_{i+1n-1}$ по свойству (а), отлично от чисел

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n} \text{ и } \delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \quad (v = 1, 2 \dots i). \quad (31)$$

Следовательно, $n - 2$ -значное число $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n-1}$ встречается среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2 \dots i$) меньше чем $q - 1$ или чем q раз, в зависимости от выполнения или невыполнения равенства

$$\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1} = \delta_{12} \dots \delta_{1n}.$$

Так как, кроме того, из свойства (б) следует, что число $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ совпадает с одним из чисел (31)', то $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ является одним из допустимых чисел. Отсюда следует возможность построения методом B $i + 1$ -й строки системы (31), что противоречит выбору индекса i .

Итак, особая система (31) может быть построена методом B , и, таким образом, лемма 2 доказана полностью.

§ 5. Перейдем к формулировке общего метода построения систем $\rho_n(q)$.

Метод A_2 . Первые n знаков $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ выписываем произвольно. Выбираем какую-нибудь особую систему с $\delta_{12} \dots \delta_{1n} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}$. Выписывание остальных знаков, начиная с $n + 1$ -го, производим по следующему общему правилу: к уже выписанным $n + k - 1$ знакам

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1) \quad (32)$$

приписываем справа знак δ_{k+n} так, чтобы получающееся при этом n -значное число $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \delta_{k+n}$ встречалось в последовательности (32) впервые и совпадало с одним из чисел выбранной особой системы лишь в случае, если все остальные числа вида $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \beta$ ($\beta \neq \delta_{k+n}$) в (32) уже встречались. Построение последовательности (32) заканчиваем, когда приписывание любого знака приводит к уже встречавшемуся n -значному числу.

ТЕОРЕМА. Последовательности, построенные методом A_2 , представляют собой системы $\rho_n(q)$; каждая из существующих систем $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_2 .

Доказательство. Пусть приписывание знаков в последовательности (32) закончилось при $k = \tau$ ($\tau \geq 1$):

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}. \quad (33)$$

Из выбора знаков δ_{k+n} ($k = 1, 2, \dots, \tau - 1$) следует, что все n -значные числа, входящие в последовательность (33), различны. Таким образом, (33) будет системой $\rho_n(q)$, если среди чисел

$$\delta_{v+1} \dots \delta_{v+n} \quad (v = 0, 1, \dots, \tau - 1)$$

встретится каждое существующее n -значное число.

Дословным повторением рассуждений, приведенных при рассмотрении метода A_1 (вывод равенства (10)), получим, что в последовательности (33) встречаются все числа вида

$$\beta \delta_1 \dots \delta_{n-1} \text{ и } \delta_1 \dots \delta_{n-1} \beta \quad (0 \leq \beta \leq q - 1).$$

Выпишем особую систему, при помощи которой строилась последовательность (33):

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} \delta_{12} \dots \delta_{1n-1} \delta_{1n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{v1} \delta_{v2} \dots \delta_{vn-1} \delta_{vn} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{s1} \delta_{s2} \dots \delta_{sn-1} \delta_{sn} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\delta_{12} \dots \delta_{1n} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}; \\ \\ \\ s = q^{n-1} - 1). \end{array}$$

Из неравенства $\delta_{12} \dots \delta_{1n} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}$ следует, что в (33) встречается каждое число вида

$$\beta \delta_{12} \dots \delta_{1n} \text{ и } \delta_{12} \dots \delta_{1n} \beta \quad (\beta = 0, 1 \dots q - 1) \quad (34)$$

Применим индукцию. Допустим, что в последовательности (33) содержатся любые n -значные числа вида

$$\beta \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \text{ и } \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \beta \quad (v = 1, 2 \dots t; t \geq 1; 0 \leq \beta \leq q - 1).$$

В частности, (33) содержит тогда все числа

$$\delta_{v1} \dots \delta_{vn} \quad (v = 1, 2, \dots, t)$$

и, следовательно, согласно методу A_2 , в (33) встретятся все числа вида

$$\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \beta.$$

По свойству (b), число $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ совпадает с одним из чисел

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n} \text{ или } \delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \quad (v = 1, 2 \dots t),$$

так что вместе с $\delta_{12} \dots \delta_{1n} \beta$ и $\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \beta$ последовательность (33) содержит, в частности, каждое число

$$\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n} \beta \quad (\beta = 0, 1 \dots q - 1).$$

Таким образом, $n - 1$ -значное число $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ встречается в (33) q раз и, в силу этого *, (33) содержит все числа вида

$$\beta \delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}.$$

Объединяя эти результаты, получим, что в последовательности (33) содержатся все числа вида

$$\beta \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \text{ и } \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \beta \quad (v = 1, 2, \dots, t + 1; 0 \leq \beta \leq q - 1).$$

Итак, индукцией доказано, что в (33) встречаются все числа вида

$$\beta \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \text{ и } \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \beta \quad (1 \leq v \leq s; 0 \leq \beta \leq q - 1)$$

и, в частности, все числа

$$\delta_{v1} \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \quad (v = 1, 2 \dots s).$$

Снова, в силу метода A_2 , получим отсюда, что в (33) встречается любое число

$$\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \beta, \quad (v = 1, 2 \dots s),$$

* Предполагаем $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n} \neq \delta_{12} \dots \delta_{1n}$, так как для случая $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n} = \delta_{12} \dots \delta_{1n}$ утверждение, что числа $\beta \delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ встречаются в последовательности (33), совпадает с уже доказанным в (34).

а эти числа, вместе с числами $\delta_{12} \dots \delta_{1n} \beta$, образуют совокупность всех n -значных чисел, чем доказано совпадение последовательности (33) с некоторым $\rho_n(q)$.

Согласно лемме 1, каждому $\rho_n(q)$ соответствует некоторая особая система. Очевидно, что построение $\rho_n(q)$ методом A_2 не накладывает на выбор знаков δ_k никаких ограничений, кроме тех, в силу которых участвующая в построении особая система становится системой, соответствующей полученному $\rho_n(q)$. Следовательно, метод A_2 позволяет получить все системы $\rho_n(q)$, которым соответствует фиксированная особая система. Но любая особая система, согласно лемме 2, может быть построена методом B . Таким образом, методом A_2 можно получить любую из существующих систем $\rho_n(q)$.

С помощью систем $\rho_n(q)$ в (3) было получено элементарное доказательство равномерности распределения функций αq^x для специальным образом построенных иррациональностей α . Во второй главе настоящей работы системы $\rho_n(q)$ существенно используются при доказательстве теорем о суммах дробных долей функций αq^x .

Глава II. О суммах дробных долей

Для случая линейной функции αx вопрос о суммах дробных долей подробно исследован в работах А. Я. Хинчина (1), Островского (5), Харди и Литтльвуда.

Доказано, что при иррациональном α

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \quad (1)$$

причем для всех иррациональных чисел α эту оценку нельзя улучшить.

Далее известны иррациональные α , для которых

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \quad (2)$$

и доказано, что дальнейшее улучшение этой оценки невозможно ни для какого α .

Наконец, почти для всех α справедлива оценка

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = \Omega(\ln P), \quad (3)$$

но при всяком $\varepsilon > 0$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(\ln^{1+\varepsilon} P). \quad (4)$$

В этой главе рассматриваются аналогичные вопросы для сумм дробных долей показательной функции αq^x , где q — целое ($q \geq 2$). При изучении сумм $\sum \{\alpha x\}$, очевидно, достаточно было ограничиться иррациональными числами α из интервала $(0, 1)$; множество иррациональных чисел

совпадает с множеством чисел, для которых функция αx равномерно распределена.

Естественно и в случае сумм $\sum \{\alpha q^x\}$ рассматривать множество L чисел α ($0 < \alpha < 1$), для которых дробные доли функции αq^x распределены равномерно*.

Доказательства основываются на применении систем $\rho_n(q)$ и на двух леммах, первая из которых сводит вопрос о суммах дробных долей к исследованию сумм знаков q -ичного разложения α . Вторая лемма позволяет, не нарушая равномерности распределения функции αq^x , так менять знаки разложения α , что их сумма, а следовательно, и сумма дробных долей, существенно меняется.

§ 1. ЛЕММА 1. Пусть α задано в системе счисления с основанием $q \geq 2$: $\alpha = 0, \delta_1 \dots \delta_k \dots$; пусть, далее, $\mu \geq 1$ — произвольное целое. Тогда справедливо соотношение:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} = \frac{1}{q^\mu - 1} \sum_{v=1}^{\mu} q^{\mu-v} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + \frac{\theta}{q^\mu - 1} \quad (|\theta| \leq 1). \quad (5)$$

Доказательство. Для всякого целого $x \geq 1$

$$\{\alpha q^{\mu x}\} = 0, \delta_{\mu x+1} \dots \delta_{\mu x+k} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{\mu x+k}}{q^k}.$$

Суммирование по x дает

$$S_\mu = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^k} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+k}.$$

Разобьем внешнюю сумму на группы по μ слагаемых:

$$S_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\mu} \frac{1}{q^{\mu k+v}} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu(x+k)+v}. \quad (6)$$

Преобразуем теперь внутреннюю сумму:

$$\sum_{x=1}^P \delta_{\mu(x+k)+v} = \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + \left(\sum_{x=P+1}^{P+k} \delta_{\mu x+v} - \sum_{x=1}^k \delta_{\mu x+v} \right);$$

в силу того, что $0 \leq \delta_k \leq q-1$,

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+k} \delta_{\mu x+v} - \sum_{x=1}^k \delta_{\mu x+v} \right| \leq k(q-1)$$

и, следовательно,

$$\sum_{x=1}^P \delta_{\mu(x+k)+v} = \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + \theta_k (q-1)k, \quad |\theta_k| \leq 1.$$

* Известно (7), что мера множества L равна 1; известны также (8) методы построения величин $\alpha \in L$.

Теперь (6) примет вид

$$S_\mu = \sum_{v=1}^{\mu} \frac{1}{q^v} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} + \theta (q-1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\mu} \frac{k}{q^{\mu k+v}}, \quad |\theta| \leq 1. \quad (7)$$

Пользуясь тем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{(q^\mu - 1)^2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{q^\mu - 1},$$

получаем из (7) утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть для $\alpha' = 0, \delta'_1 \dots \delta'_k \dots$ функция $\alpha' q^x$ равномерно распределена ($\alpha' \in L$). Пусть, далее, целые $k_1 < k_2 < \dots$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_{2s}}{k_{2s-1}} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_{2s+1}}{k_{2s}} = \infty. \quad (8)$$

Определим α разложением $\alpha = 0, \delta_1 \dots \delta_k \dots$, где

$$\delta_k = \begin{cases} \delta'_k & \text{для } k_{2s} < k \leq k_{2s+1} \\ \text{произвольно} & \text{для } k_{2s-1} < k \leq k_{2s} \end{cases} \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Тогда функция αq^x также равномерно распределена.]

Доказательство. Оценим сперва сумму

$$S_N = \sum_{x=k_{2v}+1}^N e^{2\pi i m \alpha q^x} \quad (m \geq 1 - \text{целое}), \quad (10)$$

где $k_{2v} < N \leq k_{2v+1} - r_v$ и $r_v \rightarrow \infty$ при неограниченном возрастании v . Из определения α следует, что на интервале суммирования

$$\{\alpha q^x\} = \{\alpha' q^x\} + \frac{\theta_x}{q^{r_v}}, \quad |\theta_x| \leq 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |S_N| &= \left| \sum_{x=k_{2v}+1}^N e^{2\pi i m \left(\alpha' q^x + \frac{\theta_x}{q^{r_v}} \right)} \right| \leq \left| \sum_{x=k_{2v}+1}^N e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \sum_{x=k_{2v}+1}^N \left| 1 - e^{2\pi i m \frac{\theta_x}{q^{r_v}}} \right|, \\ |S_N| &\leq \left| \sum_{x=1}^{k_{2v}} e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \left| \sum_{x=1}^N e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \frac{N - k_{2v}}{q^{r_v}} \cdot 2\pi m. \end{aligned}$$

Пользуясь определением r_v и тем, что $\alpha' \in L$, получим отсюда

$$S_N = o(N).$$

Для оценки суммы

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x}$$

определим s из условия $k_{2s-1} \leq P < k_{2s+1}$. Возможны два случая: $P \leq k_{2s} + k_{2s-2}$ и $P > k_{2s} + k_{2s-2}$.

В первом случае

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x=1}^P \right| &= \left| \sum_1^{k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-1}-k_{2s-2}+1}^P \right| \leq \\ &\leq k_{2s-2} + \left| \sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} \right| + P - k_{2s-1} + k_{2s-2}. \end{aligned}$$

и, так как $P \leq k_{2s} + k_{2s-2}$, получим

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| \leq 3k_{2s-2} + (k_{2s} - k_{2s-1}) + \left| \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} e^{2\pi i m \alpha q^x} \right|.$$

Применим оценку суммы (10) при $N = k_{2s-1} - k_{2s-2}$ для $\nu = s - 1$ и используем условия (8). Тогда

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| = o(k_{2s-1}) = o(P). \quad (11)$$

Во втором случае

$$\left| \sum_{x=1}^P \right| = \left| \sum_1^{k_{2s}} + \sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s-2}} + \sum_{P-k_{2s-2}+1}^P \right| \leq \left| \sum_1^{k_{2s}} \right| + \left| \sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s-2}} \right| + k_{2s-2}.$$

Применяя оценку суммы (10) при $N = P - k_{2s}$, $\nu = s$ и оценку (11) при $P = k_{2s}$, получим

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| = o(k_{2s}) + o(P - k_{2s}) = o(P).$$

Таким образом, оценка (11) справедлива для всех P , и, по критерию Вейля (7), функция αq^x равномерно распределена.

§ 2. Для всякого α , принадлежащего множеству L , в силу равномерности распределения дробных долей $\{\alpha q^x\}$, будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P). \quad (12)$$

Покажем, что, как и в случае линейной функции, для всех $\alpha \in L$ оценку (12) нельзя улучшить.

ТЕОРЕМА 1. Какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P)$, для которой $\lim_{P \rightarrow \infty} \varepsilon(P) = 0$, найдется $\alpha \in L$ такое, что

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Доказательство. Пусть $\alpha' = 0, \delta' \dots \delta'_r \dots$ — какое-нибудь из чисел множества L . Определим числа k , рекуррентными соотношениями

$$k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}], \quad k_{2s+1} = k_{2s}^2, \quad k_1 = 2. \quad (13)$$

Выберем, наконец, $\alpha = 0, \delta_1 \dots \delta_k \dots$, где

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_k' & \text{при } k_{2s} < k \leq k_{2s+1}, \\ q-1 & \text{при } k_{2s-1} < k \leq k_{2s}. \end{cases} \quad (14)$$

Число α удовлетворяет условиям леммы 2 и, следовательно, принадлежит множеству L .

Допустим, что для всякого $\alpha \in L$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \varepsilon(P)). \quad (15)$$

Применим лемму 1 для случая $\mu = 1$:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_{x+1} + \frac{0}{q-1} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x + O(1). \quad (16)$$

Подсчитаем сумму дробных долей αq^x для α , построенного, согласно (14), при $P = k_{2s}$:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1).$$

Согласно допущению (так как $\alpha \in L$), получим

$$\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-1} \varepsilon(k_{2s-1})).$$

Далее, в силу (14),

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} (q-1) = k_{2s} - k_{2s-1}.$$

Таким образом*,

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{2} (k_{2s} - k_{2s-1}) + O(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})).$$

В силу (13), $k_{2s} - k_{2s-1} > k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} - 1$ и при достаточно большом s будет

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} > \frac{1}{3} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} > \frac{1}{4} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})} = \Omega(k_{2s} \cdot \varepsilon(k_{2s})).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим теперь вопрос о величинах $\alpha \in L$, для которых сумма дробных долей функции αq^x наиболее близка к своему среднему значению $\frac{P}{2}$.

* Здесь и далее, без ограничения общности, можно считать $P \cdot \varepsilon(P) \rightarrow \infty$, при этом монотонно; стремление $\varepsilon(P)$ к нулю также будем считать монотонным.

ТЕОРЕМА 2. Для всякой функции $\varphi(P)$, как угодно медленно стремящейся к бесконечности при неограниченном возрастании P , найдется $\alpha \in L$ такое, что

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(\varphi(P)); \quad (17)$$

ни для какого $\alpha \in L$ оценка (17) не может быть улучшена до $O(1)$.

Доказательство. Для построения величины α , удовлетворяющей условию теоремы, используем системы $\rho'_n(q)$, введенные в главе 1 [см. (15)]. Выберем

$$\alpha = 0, \underbrace{\rho'_1(q) \dots \rho'_1(q)}_{\psi(1)} \underbrace{\rho'_2(q) \dots \rho'_2(q)}_{\psi(2)} \dots \underbrace{\rho'_n(q) \dots \rho'_n(q)}_{\psi(n)} \underbrace{\rho'_{n+1}(q) \dots}_{\psi(n+1)} \dots \quad (18)$$

Каждый знак каждого $\rho'_n(q)$ понимается здесь как очередной знак q -ичного разложения α ; рядом стоящие $\rho'_n(q)$ одинаковы и первые n знаков в $\rho'_{n+1}(q)$ ($n = 1, 2, \dots$) выбраны совпадающими с первыми n знаками $\rho'_n(q)$, наконец, $\psi(n) > 0$ — произвольная монотонная целочисленная функция, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$. Тогда [см. (3), теорема 5] функция

αq^x равномерно распределена и, следовательно, $\alpha \in L$.

Подсчитаем сумму первых P знаков в разложении (18). Обозначим общее число знаков в (18) до первого из $\rho'_{n+1}(q)$ через T_n . Так как каждое $\rho'_n(q)$ состоит из q^n знаков, то для T_n получим

$$T_n = \sum_{\nu=1}^n \psi(\nu) q^\nu. \quad (19)$$

Каждый из знаков $0, 1 \dots q-1$ в системе $\rho'_n(q)$ встречается q^{n-1} раз, следовательно, сумма знаков для одной системы $\rho'_n(q)$ будет

$$q^{n-1} \frac{q(q-1)}{2} = \frac{q-1}{2} \cdot q^n.$$

Определим k из условия $T_k \leq P < T_{k+1}$. Тогда

$$P = T_k + r q^{k+1} + r_1, \quad 0 \leq r < \psi(k+1), \quad 0 \leq r_1 < q^{k+1}.$$

Обозначая знаки в (18) через $\delta_1, \delta_2, \dots$, получим

$$\sum_{x=1}^P \delta_x = \sum_1^{T_k} + \sum_{T_k+1}^{T_k+r q^{k+1}} + \sum_{T_k+r q^{k+1}+1}^P = \sum_{\mu=1}^k \frac{q-1}{2} q^\mu \psi(\mu) + r \frac{q-1}{2} q^{k+1} + O(q^k);$$

$$\sum_{x=1}^P \delta_x = \frac{q-1}{2} (T_k + r q^{k+1}) + O(q^k) = \frac{q-1}{2} P + O(q^k).$$

В силу (16), теперь будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x + O(1) = \frac{P}{2} + O(q). \quad (20)$$

Выберем функцию $\psi(k)$ растущей настолько быстро, чтобы выполнялось условие $\psi(\sqrt{\ln \varphi(k)}) > k$. Тогда

$$\psi(\sqrt{\ln \varphi(P)}) > P \geq T_k \geq \psi(k), \quad \ln \sqrt{\varphi(P)} > k, \quad e^{k^2} < \varphi(P).$$

Но $q^k = o(e^{k^2})$, так что соотношение (20) примет вид

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P))$$

и так как, в силу (18), $\alpha \in L$, получаем первое утверждение теоремы.

Докажем теперь невозможность улучшения оценки (17). Действительно, допустим, что для некоторого $\alpha \in L$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(1).$$

Пусть это α задано разложением

$$\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \dots \quad (21)$$

Тогда, в силу (16), получим

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{P}{2} = O(1),$$

т. е. существует M такое, что для всех P

$$\left| \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{P}{2} \right| < M. \quad (22)$$

Но из $\alpha \in L$ следует, что дробные доли функции αq^x расположены на $(0,1)$ всюду плотно, так что в разложении (21) для любого целого N встретится группа из N подряд идущих знаков, равных $q-1$. Пусть такая группа начинается с $k = P_0 + 1$. Выберем $N = 4M$ и положим $P = P_0 + N$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{P}{2} &= \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P_0} \delta_x + 4M - \frac{P_0 + 4M}{2} = \\ &= \left(\frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P_0} \delta_x - \frac{P_0}{2} \right) + 2M > M, \end{aligned}$$

что противоречит (22).

Таким образом, оценка (17) не может быть улучшена, чем теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Почти для всех α порядок разности $\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2}$ равен $\sqrt{P \ln \ln P}$.

Действительно, из результатов А. Я Хинчина (2) непосредственно

следует, что порядок разности $\sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{q-1}{2} P$ почти для всех α равен $\sqrt{P \ln \ln P}$. Но, по лемме 1, при $\mu = 1$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x + O(1).$$

Объединяя эти результаты, приходим к вышеприведенному утверждению.

Обозначим через C множество иррациональных чисел отрезка $(0,1)$ и сопоставим теоремы для линейной и показательной функций.

1°. Для каждого $\alpha \in C$ (и соответственно $\alpha \in L$)

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \quad \sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P),$$

причем для всех α , принадлежащих C и, соответственно, L , эти оценки нельзя улучшить.

2°. Существуют α из C и, соответственно из L такие, что

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \quad \sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

где $\varphi(P) \rightarrow \infty$ как угодно медленно; дальнейшее улучшение этих оценок невозможно.

Результаты 1° и 2° позволяют предположить, что среднее отклонение

$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\}$ от $\frac{P}{2}$ будет меньше, чем для линейной функции, однако, как показывает замечание, справедливо противоположное утверждение:

3°. Почти для всех α отклонение суммы $\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\}$ от $\frac{P}{2}$ характеризуется функцией $\sqrt{P \ln \ln P}$ и, таким образом, значительно больше, чем соответствующее отклонение суммы $\sum_{x=1}^P \{\alpha x\}$ (которое, в силу (3) и (4), характеризуется функцией $\ln P$).

§ 3. Как показано в (4), из равномерности распределения функции αq^x ($q \geq 2$ — целое) следует, что для любого целого $\mu > 1$ функция $\alpha q^{\mu x}$ также равномерно распределена. Таким образом, если при любом целом $m \neq 0$ оценка тригонометрической суммы

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^{\mu x}} = o(P) \tag{23}$$

справедлива для $\mu = 1$, то она справедлива и для всех целых $\mu > 1$. Рассмотрим, обладают ли аналогичным свойством суммы дробных долей.

Пусть при $P \rightarrow \infty$ $\varphi(P) \rightarrow \infty$ сколь угодно медленно и α построено как в теореме 2. Тогда для $\mu = 1$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)). \tag{24}$$

Покажем, что в отличие от сумм Вейля (23) для сумм дробных долей из выполнения равенства (24) при $\mu = 1$ не следует справедливость его для всех $\mu > 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Каковы бы ни были положительные функции $\varepsilon(P)$ и $\varphi(P)$, при возрастающем P как угодно медленно стремящиеся соответственно к нулю и к бесконечности, найдется $\alpha \in L$, для которого*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)) \text{ и } \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)).$$

Доказательство. Пусть целые $k_1 < k_2 < \dots$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}], \quad k_1 = 2 \quad (25)$$

и $\alpha' = 0, \delta'_1 \dots \delta'_k \dots$ построено, как в теореме 2. Выберем $\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \dots$, где

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_k & \text{для } k_{2s} < k \leq k_{2s+1}, \\ 0 & \text{для четных } k \text{ из интервала } (k_{2s-1}, k_{2s}), \\ q-1 & \text{для нечетных } k \text{ из интервала } (k_{2s-1}, k_{2s}). \end{cases}$$

Из леммы 2 следует, что функция αq^x равномерно распределена. Оценим сумму дробных долей

$$S_1 = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\}.$$

Выберем s из условия $k_{2s-1} \leq P < k_{2s+1}$ и рассмотрим сперва случай $P \leq k_{2s}$:

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s-1}+1}^P \{\alpha q^x\}.$$

Применяя лемму 1 при $\mu = 1$ и пользуясь определением величин δ_k , получим

$$\begin{aligned} S_1 &= O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^P \delta_x = \\ &= \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta'_x + \frac{P - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}). \end{aligned}$$

Снова применим лемму 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha' q^x\} + \frac{P - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}) = \\ &= \frac{k_{2s-1}}{2} + o(\varphi(k_{2s-1})) + \frac{P - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}). \end{aligned}$$

Но, в силу (25), $k_{2s-2} = o(\varphi(k_{2s-1}))$, так что

$$S_1 = \frac{P}{2} + o(\varphi(k_{2s-1})) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)) \quad (k_{2s-1} \leq P \leq k_{2s}). \quad (26)$$

Пусть теперь $P > k_{2s}$.

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s}+1}^P \{\alpha q^x\}.$$

Применим к первой сумме справа оценку (26):

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{k_{2s}}{2} + o(\varphi(k_{2s})) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^P \delta_x = \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^P \delta'_x + o(\varphi(k_{2s})) = \\ &= \frac{k_{2s}}{2} + \sum_{x=1}^P \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha' q^x\} + o(\varphi(k_{2s})) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)). \end{aligned}$$

Объединяя этот результат с (26), получим для всех P

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

Для доказательства второго утверждения теоремы выберем $P_1 = \left[\frac{k_{2s-1}}{2} \right]$,

$P_2 = \left[\frac{k_{2s}}{2} \right] - 1$ и оценим сумму

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{2x}\}.$$

Допустим, что для всякого P будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \varepsilon(P)). \quad (27)$$

Применим лемму 1 с $\mu = 2$:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha q^{2x}\} = \\ &= \frac{P_1}{2} + \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2} \right) + O(P_1 \varepsilon(P_1)). \end{aligned}$$

Из определения величин δ_k и выбора P_1 и P_2 следует

$$\sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} = (P_2 - P_1)(q-1), \quad \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{P_1}{2} + \frac{q}{q+1} (P_2 - P_1) + O(P_1 \varepsilon(P_1)) = \\ &= \frac{P_2}{2} + \frac{q-1}{q+1} (P_2 - P_1) + O(k_{2s-1} \varepsilon(k_{2s-1})). \end{aligned}$$

* Функцию $\varphi(P)$ всюду можно считать монотонной.

Определим k из условия $T_k \leq \mu P < T_{k+1}$; тогда

$$\begin{aligned} \mu P &= T_k^2 + 2N(k+1)!q^{k+1} + R, \\ 0 \leq N &< \psi(k+1), \quad 0 \leq R \leq 2(k+1)!q^{k+1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Пусть ν — произвольное целое из интервала $1 \leq \nu \leq \mu$ и $\mu \leq n$. Отметим в r_n знаки по арифметической прогрессии с разностью μ , начиная с ν -го знака. Таким образом, будут отмечены ν -й, $\nu + \mu$ -й, $\nu + 2\mu$ -й знаки и т. д. Подсчитаем сумму отмеченных знаков. Рассмотрим сперва совокупность знаков вида

$$\underbrace{\rho'_n \dots \rho'_n}_n \underbrace{\rho'_n \dots \rho'_n}_n \dots \underbrace{\rho'_n \dots \rho'_n}_n \tag{31}$$

Число знаков в каждой группе $\underbrace{\rho'_n \dots \rho'_n}_{n!}$ кратно μ , следовательно, во второй такой группе первым будет отмечен $\nu - 1$ -й знак и т. д., пока (перед $\nu + 1$ -й группой) не будет отмечен ноль, разделяющий эти группы. В $\nu + 1$ -й группе будет отмечен μ -й знак, затем $\mu - 1$ -й и т. д. до $\nu + 1$ -го в последней.

Таким образом, совокупность отмеченных знаков совпадает с совокупностью всех знаков, содержащихся в группе $\rho'_n \dots \rho'_n 0$. Так как сумма знаков в ρ'_n равна $q^n \frac{q-1}{2}$, то сумма знаков, отмеченных в (31), будет

$$\frac{1}{2} n! q^n (q - 1). \tag{32}$$

В первой половине r_n содержится $\frac{n!}{\mu}$ групп (31), следовательно, сумма знаков в этой половине равна

$$\frac{1}{2\mu} n!^2 q^n (q - 1).$$

Рассмотрим теперь совокупность знаков

$$\underbrace{\bar{\rho}_n \rho'_n \dots \rho'_n}_{n!} \underbrace{\bar{\rho}_n \rho'_n \dots \rho'_n}_{n!} \dots \underbrace{\bar{\rho}_n \rho'_n \dots \rho'_n}_{n!} \tag{33}$$

В первом из $\bar{\rho}_n$ первым отмечен ν -й знак, во втором — $\nu + 1$ -й и т. д. до $\nu - 1$ -го в последнем. Очевидно, сумма знаков, отмеченных в (33), совпадает с суммой знаков в группе $\underbrace{\bar{\rho}_n \rho'_n \dots \rho'_n}_{n!}$. Будем пользоваться только теми системами $\bar{\rho}_n$, которые начинаются с нуля. Тогда знак, отброшенный в $\bar{\rho}_n$, равен нулю и сумма знаков в $\bar{\rho}_n \rho'_n \dots \rho'_n$ совпадет с (32).

Таким образом, суммы отмеченных знаков в первой и второй половине r_n одинаковы и сумма всех знаков, отмеченных в r_n , будет равна

$$\frac{1}{\mu} n!^2 q^n (q - 1).$$

Перейдем к оценке внутренней суммы в (29).

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+\nu} &= \frac{q-1}{\mu} (\mu!^2 q^\mu \psi(\mu) + \dots + k!^2 q^k \psi(k) + \\ &+ (k+1)!^2 q^{k+1} N) + O(R). \end{aligned}$$

Используя (30), получим

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+\nu} &= \frac{q-1}{2} P + O(R), \\ S_\mu &= \frac{1}{q^\mu - 1} \cdot \frac{q-1}{2} P \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} + O(R) = \frac{P}{2} + O(R). \end{aligned} \quad (34)$$

Но $\mu P \geq T_k \geq 2k!^2 q^k \psi(k)$ и для достаточно больших k $\psi(k) < P$.

Далее, как в теореме 2, получим $e^{k^2} < \varphi(P)$.

Таким образом,

$$R < 2(k+1)!^2 q^{k+1} = o(e^{k^2}) = o(\varphi(P))$$

и из (34) получим

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)) \quad (\mu = 1, 2, \dots) \quad (35)$$

Рассмотрим теперь величины $\alpha \in L$, для которых сумма дробных долей $\{\alpha q^x\}$ далека от среднего значения $\frac{P}{2}$. Согласно теореме 1, какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P)$, как угодно медленно стремящаяся к нулю при $P \rightarrow \infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что для $\mu = 1$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Сохранится ли это равенство для всех $\mu > 1$, если оно выполняется при $\mu = 1$? Отрицательный ответ дает следующая

ТЕОРЕМА 5. *Как бы медленно ни стремились функции $\varphi(P) \rightarrow \infty$ и $\varepsilon(P) \rightarrow 0$ при $P \rightarrow \infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)) \quad \text{и} \quad \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

Доказательство. Пусть для $\alpha' = 0, \delta'_1 \dots \delta'_k \dots$ выполняется соотношение (35) ($\alpha' \in L$). Выберем целые $k_1 < k_2 < \dots$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}], \quad k_1 = 2.$$

Построим $\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \dots$, где для четных и нечетных k из интервала (k_{2s-1}, k_{2s}) последовательности знаков δ_k совпадают соответственно с периодическими последовательностями

$$\underbrace{q-1, q-1, q-1, 1, q-1, q-1, q-1, 1, \dots}_{(k_{2s-1} < k \leq k_{2s}; k \text{ — четно})}$$

$$\underbrace{q-1, 0, q-2, 0, q-1, 0, q-2, 0 \dots}_{(k_{2s-1} < k \leq k_{2s}; k \text{ — нечетно})}$$

и где для k из интервалов (k_{2s}, k_{2s+1}) будет $\delta_k = \delta'_k$.

В силу леммы 2, $\alpha \in L$.

Оценим сумму $\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} &= \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1) = \\ &= O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1} \left(\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \delta'_x - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \delta'_x \right) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \\ &= O(k_{2s-2}) + \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \\ &= \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + o(\varphi(k_{2s-1})). \end{aligned}$$

Разбивая сумму $\sum \delta_x$ на группы по восемь слагаемых и пользуясь определением δ_k , получим

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} &= \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} \cdot 5(q-1) + o(\varphi(k_{2s-1})) = \\ &= \frac{k_{2s}}{2} + \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} + o(\varphi(k_{2s-1})). \end{aligned}$$

В силу произвольно медленного роста функции $\varphi(k)$, можно для $k \leq P$ считать $\varphi(k) = o(P \cdot \varepsilon(P))$, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} &= \\ &= \frac{1}{8} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} + o(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) > \frac{1}{9} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})}, \end{aligned}$$

и мы получаем первое утверждение теоремы:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} = \Omega(k_{2s} \varepsilon(k_{2s})) \quad (P = k_{2s}).$$

Оценим теперь сумму

$$S_2 = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\}. \quad (36)$$

Пусть s определяется условием $k_{2s+1} \leq 2P < k_{2s+1}$.

Рассмотрим сперва случай $2P \leq k_{2s}$. Пусть $P_1 = \left[\frac{k_{2s}-2}{2} \right]$ и $P_2 = \left[\frac{k_{2s}-1}{2} \right] - 1$. Разбивая в (36) интервал суммирования и применяя лемму 1 с $\mu = 2$, получим

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+2} \right) + \\ &+ \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_2+1}^P \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_2+1}^P \delta_{2x+2} \right) + O(1). \end{aligned}$$

Разобьем две последние суммы на группы по четыре слагаемых, тогда

$$\begin{aligned} S_2 &= O(P_1) + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1} (q(2q-3) + 3q-2) \frac{P-P_2}{4} = \\ &= \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1) = \frac{P_2}{2} + o(\varphi(P_2)) + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1). \end{aligned}$$

Таким образом, при $k_{2s-1} \leq 2P \leq k_{2s}$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} = \frac{P}{2} + O(P_1) + o(\varphi(P_2)) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)). \quad (37)$$

Пусть теперь $2P > k_{2s}$; обозначим $P_3 = \left[\frac{k_{2s}}{2} \right] - 1$.

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} = \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_3+1}^P \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_3+1}^P \delta_{2x+2} \right) + O(1).$$

Пользуясь (37), получим

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} &= \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \sum_{x=1}^P \{\alpha' q^{2x}\} - \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha' q^{2x}\} = \\ &= \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \frac{P}{2} + o(\varphi(P)) - \frac{P_3}{2} = \frac{P}{2} + o\left(\varphi\left(\frac{P}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Итак, всегда

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

чем теорема доказана полностью.

Как и раньше, возникает вопрос, существуют ли вообще величины $\alpha \in L$, для которых при всех целых $\mu \geq 1$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)),$$

где $\varepsilon(P)$ произвольно медленно стремится к нулю, когда P неограниченно возрастает? Легко показать, что величины α , построенные в теореме 1, обладают указанным свойством.

ТЕОРЕМА 6. *Какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P) \rightarrow 0$ при $P \rightarrow \infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что для всех целых $\mu \geq 1$ будет*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Доказательство. Выберем α как в теореме 1. Допустим, что при некотором $\mu \geq 1$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Обозначим $P_1 = \left[\frac{k_{2s-1}}{\mu} \right]$ и $P_2 = \left[\frac{k_{2s}}{\mu} \right] - 1$.

Пользуясь леммой 1, получим

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} &= \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{\mu x}\} + \frac{1}{q^\mu - 1} \sum_{v=1}^{\mu} q^{\mu-v} \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{\mu x+v} + O(1) = \\ &= \frac{P_1}{2} + O(P_1 \cdot \varepsilon(P_1)) + \frac{q-1}{q^\mu - 1} (P_2 - P_1) \sum_{v=1}^{\mu} q^{\mu-v}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P_2}{2} &= \frac{P_2 - P_1}{2} + O(P_1 \cdot \varepsilon(P_1)) = \\ &= \frac{k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}}{2\mu} + O(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) > \frac{1}{3\mu} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})} = \Omega(P_2 \varepsilon(P_2)). \quad (38) \end{aligned}$$

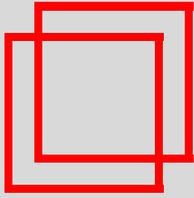
Но (38) противоречит допущению, чем теорема доказана.

Поступило
13. IV. 1950

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Хинчин А. Я., Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen, Math. Zeit., 18 (1923), 289 — 306.
- ² Хинчин А. Я., Über dyadische Brüche, Math. Zeit., 18 (1923), 109 — 116; Über einen Satz der Warscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. 6 (1924), 9 — 20; Асимптотические законы теории вероятностей, гл. V, М. — Л., 1936.

- ³ К о р о б о в Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 215 — 238.
- ⁴ Ш а п и р о-П я т е ц к и й И. И., О законах распределения дробных долей показательной функции, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 47—52.
- ⁵ O s t r o w s k i A., Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, Abh. Hamb. Universität, 1 (1921), 77 — 98.
- ⁶ G o o d I. J., Normal recurring decimals, Journ. Lond. Math. Soc., 213, N 83 (1946), 167 — 169.
- ⁷ W e y l H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann., 77 (1916), 313 — 352.
- ⁸ D e B r u i j n N. G., A combinatorial problem, Kon. Ned. Akad. v. Wet., 49, 7 (1946), 758 — 764.



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. M. Korobov, Normal periodic systems and their applications to the estimation of sums of fractional parts, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1951, Volume 15, Issue 1, 17–46

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 181.47.21.139

October 3, 2024, 19:41:45



очевидно совпадает с совокупностью всех возможных трехзначных чисел (1)'.

Легко проверить, что в системе счисления с основанием 4 двузначные числа, получающиеся при рассмотрении всех пар соседних знаков семнадцатизначной последовательности

$$22330010203112132, \quad (3)$$

совпадают с совокупностью всех возможных двузначных чисел:

$$00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33.$$

Нормальной периодической системой или *системой* $\rho_n(q)$ назовем последовательность из t знаков

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n} \dots \delta_t \quad (4)$$

($t = q^n + n - 1$; δ_v — целые из интервала $0 \leq \delta_v \leq q - 1$), обладающую тем свойством, что совокупность n -значных чисел

$$\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n} \quad (k = 0, 1, \dots, q^n - 1),$$

получающихся из соседних знаков последовательности (4), совпадает с совокупностью всех возможных n -значных чисел (1) в системе счисления с основанием q .

Последовательности (2) и (3), очевидно, представляют собой примеры систем $\rho_3(2)$ и $\rho_2(4)$.

Существование нормальных периодических систем для любого n было доказано Гудом (6). Гуду принадлежит также пример системы $\rho_6(2)$.

Примеры систем $\rho_n(q)$ при малых значениях n и q ($n < 5$, $q = 2$) строятся легко. Нахождение систем $\rho_5(2)$ несколько труднее. Без знания общего метода построения систем $\rho_n(q)$ найти примеры $\rho_n(q)$ для $n > 5$ весьма трудно уже при $n = 6$ и $q = 2$. Такой метод, дающий вместе с тем доказательство существования систем $\rho_n(q)$, отличное от доказательства Гуда, был получен в моей работе (3). Для случая двоичной системы счисления этот метод состоит в следующем:

Метод А (для $q = 2$). Первые n знаков выбираем равными единице. Далее приписываем справа ноль до тех пор, пока получающиеся при этом новые n -значные числа встречаются впервые. Единицу приписываем лишь в том случае, когда приписывание нуля приводит к уже встречавшемуся n -значному числу. Приписывание заканчиваем, когда любой новый знак приводит к n -значному числу, которое уже встречалось.

Таким образом, построение $\rho_n(2)$ методом А представляет собой рекуррентный процесс, позволяющий по уже выбранным $k + n - 1$ знакам

$$\delta_1 \dots \delta_n \dots \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1) \quad (5)$$

выбирать следующий знак δ_{k+n} :

$$\delta_{k+n} = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} 0 \neq \delta_{v+1} \dots \delta_{v+n} \quad (v = 0, 1, \dots, k-1), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство того, что невозможность дальнейшего приписывания знаков в последовательности (5) наступает лишь когда выписанные зна-

ки образуют систему $\rho_n(2)$, было проведено в (3). Здесь мы получим это доказательство как следствие из более общего метода построения систем $\rho_n(q)$ — метода A_1 .

С помощью метода A без труда строятся системы $\rho_5(2)$, $\rho_6(2)$ и т. д.

$$\rho_5(2) = 111110000010001100101001110101101111,$$

$$\rho_6(2) = 11111100000010000110001010001110010101100111101101111011011111111,$$

$$\rho_7(2) = 1111111000000010000011000010100001110001001000101100011010001111001001100101010010111001101100111010011111010101101011110110111011111111.$$

§ 2. Метод A_1 . Выберем первые n знаков $\delta_1, \dots, \delta_n$ произвольно. Знаки $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}$ и т. д. будем приписывать по следующему общему правилу: пусть уже выписан $k+n-1$ знак

$$\delta_1 \dots \delta_n \dots \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1). \quad (6)$$

Рассмотрим $n-1$ -значное число $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1}$, стоящее на конце последовательности (6). Пусть последние μ знаков этого числа ($0 \leq \mu \leq n-1$) образуют наибольшую группу, совпадающую с группой начальных знаков $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_\mu$. Выберем теперь знак δ_{k+n} или любым, отличным от $\delta_{\mu+1}$, но так, чтобы получающееся при этом новое n -значное число $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \delta_{k+n}$ не совпадало ни с одним из уже выписанных в (6) n -значных чисел $\delta_{\nu+1} \dots \delta_{\nu+n}$ ($\nu = 0, 1, \dots, k-1$), или равным $\delta_{\mu+1}$, если приписывание любого знака, отличного от $\delta_{\mu+1}$, приводит к уже встречавшемуся в (6) n -значному числу. Процесс приписывания прекращаем, когда приписывание любого знака приводит к уже встречавшемуся n -значному числу.

Пусть невозможность дальнейшего приписывания знаков в последовательности (6) наступила при $k = \tau$ ($\tau \geq 1$). Очевидно, что все n -значные числа, которые встретятся в получившейся при этом последовательности

$$\delta_1 \dots \delta_n \dots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}, \quad (7)$$

будут различны. Однако остается неясным, не могло ли приписывание новых знаков закончиться раньше, чем в (7) будет выписано каждое из существующих n -значных чисел.

Таким образом, чтобы доказать совпадение последовательности (7), построенной методом A_1 , с некоторой системой $\rho_n(q)$, достаточно prove, что среди n -значных чисел

$$\delta_{\nu+1} \dots \delta_{\nu+n} \quad (\nu = 0, 1, \dots, \tau-1), \quad (8)$$

содержащихся в последовательности (7), встретится каждое из существующих n -значных чисел (1).

Обозначим через β и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ величины, каждая из которых, независимо от остальных, может принимать любое из q значений $0, 1, \dots, q-1$. Покажем сперва, что в последовательности (7) встретится любое число вида

$$\beta_{n-1} \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \quad (\beta_{n-1} = 0, 1, \dots, q-1). \quad (9)$$

Действительно, $n - 1$ -значное число $\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}$, которым заканчивается последовательность (7), встречается в ней с любым знаком справа (иначе процесс приписывания не был бы прекращен), следовательно, это число встречается в (7) ровно $q + 1$ раз. При этом каждый раз к нему слева должны примыкать различные знаки, что возможно лишь в том случае, если один раз это число встретится в начале последовательности (7), т. е. если

$$\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}. \quad (10)$$

Итак, в (7) встречается любое число вида $\beta_{n-1} \delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}$ и, в силу (10), любое число вида $\beta_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-1}$ ($\beta_{n-1} = 0, 1, \dots, q - 1$).

Разобьем теперь все n -значные числа на классы R_v^n ($v = 0, 1, \dots, n$), относя к классу R_v^n все числа, у которых наибольшая группа последних знаков, совпадающих со знаками $\delta_1 \delta_2 \dots$, состоит из v знаков. Числа класса R_v^n будем записывать в виде $\beta'_v \dots \beta'_{n-1} \delta_1 \dots \delta_v$. (Заметим, что не обязательно всякое число вида $\beta_v \dots \beta_{n-1} \delta_1 \dots \delta_v$ принадлежит классу R_v^n — оно может принадлежать к классу $R_{v_1}^n$, где $v_1 > v$.)

Класс R_n^n состоит, очевидно, из единственного числа $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta_n$; с этого числа начинается последовательность (7). Как было показано выше, все числа вида $\beta_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-1}$ также содержатся в (7). Таким образом, доказано, что все числа классов R_n^n и R_{n-1}^n встречаются в последовательности (7). Применим индукцию. Допустим, что в (7) содержатся все числа класса R_{n-s}^n ($s \geq 1$). Покажем, что тогда в (7) содержатся также все числа класса $R_{n-(s+1)}^n$.

Рассмотрим $n - 1$ -значные числа

$$\beta''_{n-s} \dots \beta''_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)},$$

принадлежащие классу $R_{n-(s+1)}^{n-1}$. Каждое такое число встретится среди $n - 1$ -значных чисел, с которых начинаются n -значные числа

$$\beta'_{n-s} \dots \beta'_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \delta_{n-s}$$

класса R_{n-s}^n . По индукционному предположению, в последовательности (7) содержится любое n -значное число вида

$$\beta'_{n-s} \dots \beta'_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \delta_{n-s},$$

а значит и всякое число вида

$$\beta''_{n-s} \dots \beta''_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \delta_{n-s}. \quad (11)$$

Согласно методу A_1 , каждое из чисел (11) могло быть выписано в последовательности (7) лишь в том случае, когда в (7) уже встречалось любое число вида

$$\beta''_{n-s} \dots \beta''_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \beta \quad (\beta \neq \delta_{n-s}). \quad (12)$$

Из (11) и (12) получаем, что каждое $n - 1$ -значное число

$$\beta''_{n-s} \dots \beta''_{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)} \quad (13)$$

класса $R_{n-(s+1)}^{n-1}$ встречается в (7) равно q раз. Ни одно из этих чисел не стоит в начале последовательности (7) (так как в начале (7) стоит число $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$, принадлежащее классу R_{n-1}^{n-1} , отличному от класса

$R_{n-(s+1)}^{n-1}$ при $s \geq 1$). Но тогда каждое $n-1$ -значное число (13) встретится в последовательности (7) с любым знаком слева и, следовательно, в (7) содержатся все n -значные числа вида

$$\beta_{n-(s+1)} \beta_{n-s}'' \dots \beta_{n-1}'' \delta_1 \dots \delta_{n-(s+1)},$$

а вместе с тем и все числа класса $R_{n-(s+1)}^n$.

Итак, последовательность (7) содержит все классы $R_{n,\nu}^n = n, n-1, \dots, 1, 0$ (а значит и все n -значные числа) и, таким образом, представляет собой некоторую систему $\rho_n(q)$.

Отсюда непосредственно следует, что и метод A , указанный выше для случая $q = 2$, приводит к построению систем $\rho_n(2)$, так как он является частным случаем метода A_1 . (Легко проверить, что метод A для $q = 2$ получается из метода A_1 при $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta_n = 11 \dots 11$.)

§ 3. Покажем, что не всякая система $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_1 .

Прежде всего заметим, что для каждой системы $\rho_n(q)$

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} \tag{14}$$

справедливо равенство

$$\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}, \tag{10}$$

доказанное ранее [см. (10)] для систем $\rho_n(q)$, полученных методом A_1 . Действительно, $n-1$ -значное число $\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}$, стоящее на конце системы (14), встречается в ней еще q раз (так как система (14), являясь системой $\rho_n(q)$, содержит каждое n -значное число вида $\delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1} \beta$, где $\beta = 0, 1, \dots, q-1$). Дальше доказательство совпадает с доказательством (10).

В соответствии с (10) будем в дальнейшем системы $\rho_n(q)$ записывать в виде

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \mid \delta_1 \dots \delta_{n-1} \text{ или } \delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1} \quad (\tau = q^n), \tag{15}$$

причем систему из первых q^n знаков

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \tag{15'}$$

будем называть *системой* $\rho'_n(q)$. Произведем в $\rho'_n(q)$ произвольную циклическую перестановку знаков:

$$\delta_{k+1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_k. \tag{16}$$

Припишем в (16) справа $n-1$ -значное число $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1}$; тогда получим последовательность

$$\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_k \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1}. \tag{17}$$

Эта последовательность содержит все n -значные числа, встречающиеся в (15), и, следовательно, также представляет собой некоторую систему $\rho_n(q)$.

Две системы $\rho_n(q)$ будем называть *существенно различными*, если соответствующие им системы $\rho'_n(q)$ никакой циклической перестановкой

нельзя перевести друг в друга. Системы считаем просто *различными*, если не все их знаки соответственно совпадают. Так, например, существует всего 4 различных системы $\rho_2(2)$:

$$1100|1, \quad 1001|1, \quad 0011|0, \quad 0110|0.$$

Среди этих систем нет существенно различных. Системы $\rho_3(2)$

$$01000111|01 \text{ и } 11100010|11$$

не только различны, но и существенно различны; системы (15) и (17) не будут существенно различны.

Как показано в (8), число существенно различных систем $\rho_n(2)$ для всякого n равно 2^r , где $r = 2^{n-1} - n$. Обозначим через T_n число существенно различных систем $\rho_n(2)$, которые могут быть получены методом A_1 . Так как в методе A_1 при $q = 2$ все знаки, начиная с δ_{n+1} , определяются единственным образом, то число различных систем $\rho_n(2)$, получаемых методом A_1 , равно числу различных n -значных чисел $\delta_1 \dots \delta_n$, т. е. равно 2^n . Некоторые из этих 2^n систем могут не быть существенно различными, так что

$$T_n \leq 2^n.$$

Но при $n > 4$

$$2^n < 2^r \quad (r = 2^{n-1} - n)$$

и, следовательно,

$$T_n < 2^n \quad (n \geq 5).$$

Таким образом, для $n \geq 5$ методом A_1 нельзя получить все системы $\rho_n(q)$. (Уже при $n = 5$ из 2048 существующих существенно различных систем $\rho_5(2)$ при помощи метода A_1 можно получить не больше 32 систем.)

§ 4. Возникает вопрос о методе, который позволил бы построить любую из существующих систем $\rho_n(q)$.

Изложению такого метода предположим несколько вспомогательных предложений. Рассмотрим систему $\rho_n(q)$:

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1} \quad (\tau = q^n). \quad (18)$$

Пусть $\delta_{k1} \delta_{k2} \dots \delta_{kn-1}$ — произвольное $n-1$ -значное число, отличное от $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$. Это число встречается в системе (18) ровно q раз. Каждый раз знаком, примыкающим к нему справа, число $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}$ дополняется до некоторого n -значного числа. Пусть $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1} \delta_{kn}$ — последнее (считая слева направо) из этих n -значных чисел. Назовем полученную таким образом совокупность из $s = q^{n-1} - 1$ n -значных чисел

$$\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1} \delta_{kn} \quad (k = 1, 2, \dots, q^{n-1} - 1) \quad (19)$$

системой, соответствующей данному $\rho_n(q)$. Назовем, далее, особой системой всякую совокупность n -значных чисел

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11}\delta_{12} \dots \delta_{1n-1}\delta_{1n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{k1}\delta_{k2} \dots \delta_{kn-1}\delta_{kn} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{s1}\delta_{s2} \dots \delta_{sn-1}\delta_{ns} \end{array} \right\} \quad (s = q^{n-1} - 1) \quad (20)$$

(δ_{ik} — целые из интервала $0 \leq \delta_{ik} \leq q - 1$), для которой выполняются условия:

(а) все $n - 1$ -значные числа $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}$ ($k = 1, 2, \dots, q^{n-1} - 1$) различны, причем ни одно из них не равно $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$ (таким образом, среди чисел $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}$ встречаются все возможные $n - 1$ -значные числа за исключением числа $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$);

(б) возможно такое расположение строк (20), что (если считать его выполненным) для $k \geq 2$ всякое $n - 1$ -значное число $\delta_{k2} \dots \delta_{kn}$ равно или одному из чисел $\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, k - 1$), или числу $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$.

Так, например, системам $\rho_3(2)$ и $\rho_2(4)$

$$1000101110 \text{ и } 22330010203112132$$

будут соответствовать системы

$$\left. \begin{array}{l} 110 \\ 011 \\ 001 \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} 32 \\ 03 \\ 13 \end{array} \right\}. \quad (21)$$

Системы (21) являются, очевидно, особыми.

ЛЕММА 1. Всякая система (19), соответствующая $\rho_n(q)$, является особой системой.

Согласно определению (19), среди чисел $\delta_{k1} \dots \delta_{kn-1}$ встречаются все $n - 1$ -значные числа, отличные от $\delta_1 \dots \delta_{n-1}$. Таким образом, для проверки свойства (а) надо лишь показать, что в (19) содержится хотя бы одно число вида $\beta\delta_1 \dots \delta_{n-1}$.

Рассмотрим сначала системы $\rho_n(q)$, для которых

$$\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} \neq \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}.$$

Число $\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} \delta_{n-1}$, являясь последним из чисел системы (18), имеющих вид $\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} \beta$, встретится среди чисел системы (19).

Для систем $\rho_n(q)$, в которых

$$\delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-2} = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1},$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \delta_\tau &= \delta_1 = \dots = \delta_{n-1}; & \delta_{\tau-1} &\neq \delta_\tau, \\ \delta_{\tau-1} \delta_1 \dots \delta_{n-2} &\neq \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}. \end{aligned}$$

В случае $p = r$, пользуясь (26), получим

$$\lambda_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+n-1} = \lambda_r \lambda_r \dots \lambda_r,$$

что снова невозможно, так как система, соответствующая ρ_n , не может содержать чисел, состоящих из одинаковых знаков.

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Каждая из существующих особых систем может быть получена следующим методом:*

Метод В. В первой строке выписываем любое n -значное число $\delta_{11} \delta_{12} \dots \delta_{1n-1} \delta_{1n}$, не все знаки которого одинаковы. (Таким образом, $\delta_{11} \dots \delta_{1n-1} \neq \delta_{12} \dots \delta_{1n}$.) Все остальные строки, начиная со второй, строим по следующему общему правилу: пусть уже выписано k строк ($k \geq 1$)

$$\begin{array}{ccccccc} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n-1} & \delta_{1n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} & \dots & \delta_{kn-1} & \delta_{kn}. \end{array}$$

Рассмотрим $n - 1$ -значные числа

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n}, \delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \quad (v = 1, 2, \dots, k). \tag{27}$$

Назовем допустимыми числами те числа $\mu_1 \dots \mu_{n-1}$ из совокупности (27), для которых $\mu_1 \dots \mu_{n-2} = \delta_{13} \dots \delta_{1n}$, если $\delta_{13} \dots \delta_{1n}$ встречалось среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, k$) меньше $q - 1$ раза, а также те, для которых $\mu_1 \dots \mu_{n-2} \neq \delta_{13} \dots \delta_{1n}$, если $\mu_1 \dots \mu_{n-2}$ встречалось среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, k$) меньше q раз.

Для построения $k + 1$ -й строки выберем $\delta_{k+12} \dots \delta_{k+1n}$ равным любому из допустимых чисел; знак δ_{k+11} выберем так, чтобы число $\delta_{k+11} \dots \delta_{k+1n-1}$ отличалось от любого из чисел (27).

Таким образом, $k + 1$ -я строка построена. Построение методом В считаем законченным, когда построение очередной строки окажется невозможным.

Докажем сперва, что метод В всегда приводит к некоторой особой системе.

Действительно, процесс построения строк не может закончиться из-за невозможности выбрать δ_{k+11} (это следует из выбора допустимых чисел). Таким образом, построение заканчивается из-за невозможности выбрать $\delta_{k+12} \dots \delta_{k+1n}$, т. е. из-за того, что для некоторого $k = s$ группа допустимых чисел не будет содержать ни одного числа.

Выпишем строки, которые удается построить методом В:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n-1} & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \dots & \delta_{kn-1} & \delta_{kn} \\ \delta_{k+11} & \delta_{k+12} & \dots & \delta_{k+1n-1} & \delta_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \dots & \delta_{sn-1} & \delta_{sn} \end{array} \right\}. \tag{28}$$

Так как каждое из чисел $\delta_{k+12} \dots \delta_{k+1n}$ содержится среди чисел (27) ($k = 1, 2, \dots, s - 1$), то можно утверждать, что для системы (28)

выполняется свойство (b). Далее, из метода выбора знаков δ_{k+1} следует, что все $n - 1$ -значные числа

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} \dots \delta_{1n-1} \\ \dots \dots \dots \\ \delta_{s1} \dots \delta_{sn-1} \end{array} \right\} \quad (29)$$

различны и не равны $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$. Таким образом, остается показать, что $s = q^{n-1} - 1$, т. е. что среди чисел (29) содержатся все $n - 1$ -значные числа, кроме $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$.

Рассмотрим числа (27) для $k = s$:

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n} \text{ и } \delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \quad (v = 1, 2, \dots, s). \quad (30)$$

Число $\delta_{12} \dots \delta_{1n-1}$ встречается среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, s$) $q - 1$ или q раз, смотря по тому, совпадает оно с числом $\delta_{13} \dots \delta_{1n}$ или нет (иначе группа допустимых чисел для $k = s$ содержала бы число $\delta_{12} \dots \delta_{1n}$ и не была бы пустой). Но тогда среди чисел (30) встречается любое число вида

$$\beta_1 \delta_{12} \dots \delta_{1n-1} \quad (\beta_1 = 0, 1, \dots, q - 1).$$

Допустим, что среди чисел (30) встречается любое число вида

$$\beta_i \beta_{i-1} \dots \beta_1 \delta_{12} \dots \delta_{1n-i} \quad (0 \leq \beta_j \leq q - 1; j = 1, 2, \dots, i).$$

Тогда число $\beta_i \dots \beta_1 \delta_{12} \dots \delta_{1n-i-1}$ встречается среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2, \dots, s$) $q - 1$ или q раз, смотря по тому, совпадает оно с $\delta_{13} \dots \delta_{1n}$ или нет. Следовательно, любое число вида

$$\beta_{i+1} \beta_i \dots \beta_1 \delta_{12} \dots \delta_{1n-(i+1)}$$

также встречается среди чисел (30).

Таким образом, индукцией получаем, что среди чисел (30) встречается каждое число вида $\beta_{n-1} \beta_{n-2} \dots \beta_1$, т. е. каждое $n - 1$ -значное число.

Следовательно,

$$s + 1 = q^{n-1},$$

и система (28) является особой.

Покажем теперь, что методом B можно получить любую из существующих особых систем. Допустим, что особая система

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} \quad \delta_{12} \quad \dots \quad \delta_{1n-1} \quad \delta_{1n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{i1} \quad \delta_{i2} \quad \dots \quad \delta_{in-1} \quad \delta_{in} \\ \delta_{i+11} \quad \delta_{i+12} \quad \dots \quad \delta_{i+1n-1} \quad \delta_{i+1n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{s1} \quad \delta_{s2} \quad \dots \quad \delta_{sn-1} \quad \delta_{sn} \end{array} \right\} \quad (s = q^{n-1} - 1) \quad (31)$$

не может быть получена методом B .

Обозначим через i наибольшее число строк этой системы, построение которых методом B возможно. Так как первая строка системы (31) должна удовлетворить единственному требованию $\delta_{11} \dots \delta_{1n-1} \neq \delta_{12} \dots \delta_{1n}$ — тому же, как и первая строка в методе B , то получим, что $i \geq 1$.

Рассмотрим $(i + 1)$ -ю строку системы (31). Число $\delta_{i+11} \dots \delta_{i+1n-1}$ по свойству (а), отлично от чисел

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n} \text{ и } \delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \quad (v = 1, 2 \dots i). \quad (31)$$

Следовательно, $n - 2$ -значное число $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n-1}$ встречается среди чисел $\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1}$ ($v = 1, 2 \dots i$) меньше чем $q - 1$ или чем q раз, в зависимости от выполнения или невыполнения равенства

$$\delta_{v2} \dots \delta_{vn-1} = \delta_{12} \dots \delta_{1n}.$$

Так как, кроме того, из свойства (b) следует, что число $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ совпадает с одним из чисел (31)', то $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ является одним из допустимых чисел. Отсюда следует возможность построения методом B $i + 1$ -й строки системы (31), что противоречит выбору индекса i .

Итак, особая система (31) может быть построена методом B , и, таким образом, лемма 2 доказана полностью.

§ 5. Перейдем к формулировке общего метода построения систем $\rho_n(q)$.

Метод A_2 . Первые n знаков $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ выписываем произвольно. Выбираем какую-нибудь особую систему с $\delta_{12} \dots \delta_{1n} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}$. Выписывание остальных знаков, начиная с $n + 1$ -го, производим по следующему общему правилу: к уже выписанным $n + k - 1$ знакам

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \quad (k \geq 1) \quad (32)$$

приписываем справа знак δ_{k+n} так, чтобы получающееся при этом n -значное число $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \delta_{k+n}$ встречалось в последовательности (32) впервые и совпадало с одним из чисел выбранной особой системы лишь в случае, если все остальные числа вида $\delta_{k+1} \dots \delta_{k+n-1} \beta$ ($\beta \neq \delta_{k+n}$) в (32) уже встречались. Построение последовательности (32) заканчиваем, когда приписывание любого знака приводит к уже встречавшемуся n -значному числу.

ТЕОРЕМА. Последовательности, построенные методом A_2 , представляют собой системы $\rho_n(q)$; каждая из существующих систем $\rho_n(q)$ может быть получена методом A_2 .

Доказательство. Пусть приписывание знаков в последовательности (32) закончилось при $k = \tau$ ($\tau \geq 1$):

$$\delta_1 \dots \delta_{n-1} \dots \delta_\tau \delta_{\tau+1} \dots \delta_{\tau+n-1}. \quad (33)$$

Из выбора знаков δ_{k+n} ($k = 1, 2, \dots, \tau - 1$) следует, что все n -значные числа, входящие в последовательность (33), различны. Таким образом, (33) будет системой $\rho_n(q)$, если среди чисел

$$\delta_{v+1} \dots \delta_{v+n} \quad (v = 0, 1, \dots, \tau - 1)$$

встретится каждое существующее n -значное число.

Дословным повторением рассуждений, приведенных при рассмотрении метода A_1 (вывод равенства (10)), получим, что в последовательности (33) встречаются все числа вида

$$\beta \delta_1 \dots \delta_{n-1} \text{ и } \delta_1 \dots \delta_{n-1} \beta \quad (0 \leq \beta \leq q - 1).$$

Выпишем особую систему, при помощи которой строилась последовательность (33):

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} \delta_{12} \dots \delta_{1n-1} \delta_{1n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{v1} \delta_{v2} \dots \delta_{vn-1} \delta_{vn} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{s1} \delta_{s2} \dots \delta_{sn-1} \delta_{sn} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\delta_{12} \dots \delta_{1n} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}; \\ \\ \\ \\ s = q^{n-1} - 1). \end{array}$$

Из неравенства $\delta_{12} \dots \delta_{1n} = \delta_1 \dots \delta_{n-1}$ следует, что в (33) встречается каждое число вида

$$\beta \delta_{12} \dots \delta_{1n} \text{ и } \delta_{12} \dots \delta_{1n} \beta \quad (\beta = 0, 1 \dots q - 1) \quad (34)$$

Применим индукцию. Допустим, что в последовательности (33) содержатся любые n -значные числа вида

$$\beta \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \text{ и } \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \beta \quad (v = 1, 2 \dots t; t \geq 1; 0 \leq \beta \leq q - 1).$$

В частности, (33) содержит тогда все числа

$$\delta_{v1} \dots \delta_{vn} \quad (v = 1, 2, \dots, t)$$

и, следовательно, согласно методу A_2 , в (33) встретятся все числа вида

$$\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \beta.$$

По свойству (b), число $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ совпадает с одним из чисел

$$\delta_{12} \dots \delta_{1n} \text{ или } \delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \quad (v = 1, 2 \dots t),$$

так что вместе с $\delta_{12} \dots \delta_{1n} \beta$ и $\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \beta$ последовательность (33) содержит, в частности, каждое число

$$\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n} \beta \quad (\beta = 0, 1 \dots q - 1).$$

Таким образом, $n - 1$ -значное число $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ встречается в (33) q раз и, в силу этого *, (33) содержит все числа вида

$$\beta \delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}.$$

Объединяя эти результаты, получим, что в последовательности (33) содержатся все числа вида

$$\beta \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \text{ и } \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \beta \quad (v = 1, 2, \dots, t + 1; 0 \leq \beta \leq q - 1).$$

Итак, индукцией доказано, что в (33) встречаются все числа вида

$$\beta \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \text{ и } \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \beta \quad (1 \leq v \leq s; 0 \leq \beta \leq q - 1)$$

и, в частности, все числа

$$\delta_{v1} \delta_{v2} \dots \delta_{vn} \quad (v = 1, 2 \dots s).$$

Снова, в силу метода A_2 , получим отсюда, что в (33) встречается любое число

$$\delta_{v1} \dots \delta_{vn-1} \beta, \quad (v = 1, 2 \dots s),$$

* Предполагаем $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n} \neq \delta_{12} \dots \delta_{1n}$, так как для случая $\delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n} = \delta_{12} \dots \delta_{1n}$ утверждение, что числа $\beta \delta_{i+12} \dots \delta_{i+1n}$ встречаются в последовательности (33), совпадает с уже доказанным в (34).

а эти числа, вместе с числами $\delta_{12} \dots \delta_{1n} \beta$, образуют совокупность всех n -значных чисел, чем доказано совпадение последовательности (33) с некоторым $\rho_n(q)$.

Согласно лемме 1, каждому $\rho_n(q)$ соответствует некоторая особая система. Очевидно, что построение $\rho_n(q)$ методом A_2 не накладывает на выбор знаков δ_k никаких ограничений, кроме тех, в силу которых участвующая в построении особая система становится системой, соответствующей полученному $\rho_n(q)$. Следовательно, метод A_2 позволяет получить все системы $\rho_n(q)$, которым соответствует фиксированная особая система. Но любая особая система, согласно лемме 2, может быть построена методом B . Таким образом, методом A_2 можно получить любую из существующих систем $\rho_n(q)$.

С помощью систем $\rho_n(q)$ в (3) было получено элементарное доказательство равномерности распределения функций αq^x для специальным образом построенных иррациональностей α . Во второй главе настоящей работы системы $\rho_n(q)$ существенно используются при доказательстве теорем о суммах дробных долей функций αq^x .

Глава II. О суммах дробных долей

Для случая линейной функции αx вопрос о суммах дробных долей подробно исследован в работах А. Я. Хинчина (1), Островского (5), Харди и Литтльвуда.

Доказано, что при иррациональном α

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \quad (1)$$

причем для всех иррациональных чисел α эту оценку нельзя улучшить.

Далее известны иррациональные α , для которых

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \quad (2)$$

и доказано, что дальнейшее улучшение этой оценки невозможно ни для какого α .

Наконец, почти для всех α справедлива оценка

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = \Omega(\ln P), \quad (3)$$

но при всяком $\varepsilon > 0$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(\ln^{1+\varepsilon} P). \quad (4)$$

В этой главе рассматриваются аналогичные вопросы для сумм дробных долей показательной функции αq^x , где q — целое ($q \geq 2$). При изучении сумм $\sum \{\alpha x\}$, очевидно, достаточно было ограничиться иррациональными числами α из интервала $(0,1)$; множество иррациональных чисел

совпадает с множеством чисел, для которых функция αx равномерно распределена.

Естественно и в случае сумм $\sum \{\alpha q^x\}$ рассматривать множество L чисел α ($0 < \alpha < 1$), для которых дробные доли функции αq^x распределены равномерно*.

Доказательства основываются на применении систем $\rho_n(q)$ и на двух леммах, первая из которых сводит вопрос о суммах дробных долей к исследованию сумм знаков q -ичного разложения α . Вторая лемма позволяет, не нарушая равномерности распределения функции αq^x , так менять знаки разложения α , что их сумма, а следовательно, и сумма дробных долей, существенно меняется.

§ 1. ЛЕММА 1. Пусть α задано в системе счисления с основанием $q \geq 2$: $\alpha = 0, \delta_1 \dots \delta_k \dots$; пусть, далее, $\mu \geq 1$ — произвольное целое. Тогда справедливо соотношение:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} = \frac{1}{q^\mu - 1} \sum_{v=1}^{\mu} q^{\mu-v} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + \frac{\theta}{q^\mu - 1} \quad (|\theta| \leq 1). \quad (5)$$

Доказательство. Для всякого целого $x \geq 1$

$$\{\alpha q^{\mu x}\} = 0, \delta_{\mu x+1} \dots \delta_{\mu x+k} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{\mu x+k}}{q^k}.$$

Суммирование по x дает

$$S_\mu = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^k} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+k}.$$

Разобьем внешнюю сумму на группы по μ слагаемых:

$$S_\mu = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\mu} \frac{1}{q^{\mu h+v}} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu(x+h)+v}. \quad (6)$$

Преобразуем теперь внутреннюю сумму:

$$\sum_{x=1}^P \delta_{\mu(x+h)+v} = \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + \left(\sum_{x=P+1}^{P+h} \delta_{\mu x+v} - \sum_{x=1}^h \delta_{\mu x+v} \right);$$

в силу того, что $0 \leq \delta_k \leq q-1$,

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+h} \delta_{\mu x+v} - \sum_{x=1}^h \delta_{\mu x+v} \right| \leq k(q-1)$$

и, следовательно,

$$\sum_{x=1}^P \delta_{\mu(x+h)+v} = \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+v} + \theta_k (q-1)k, \quad |\theta_k| \leq 1.$$

* Известно (7), что мера множества L равна 1; известны также (8) методы построения величин $\alpha \in L$.

Теперь (6) примет вид

$$S_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{q^\nu} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x + \nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} + \theta (q-1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{k}{q^{\mu k + \nu}}, \quad |\theta| \leq 1. \quad (7)$$

Пользуясь тем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{(q^\mu - 1)^2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\mu k}} = \frac{q^\mu}{q^\mu - 1},$$

получаем из (7) утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть для $\alpha' = 0, \delta'_1 \dots \delta'_k \dots$ функция $\alpha' q^x$ равномерно распределена ($\alpha' \in L$). Пусть, далее, целые $k_1 < k_2 < \dots$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_{2s}}{k_{2s-1}} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_{2s+1}}{k_{2s}} = \infty. \quad (8)$$

Определим α разложением $\alpha = 0, \delta_1 \dots \delta_k \dots$, где

$$\delta_k = \begin{cases} \delta'_k & \text{для } k_{2s} < k \leq k_{2s+1} \\ \text{произвольно} & \text{для } k_{2s-1} < k \leq k_{2s} \end{cases} \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Тогда функция αq^x также равномерно распределена.]

Доказательство. Оценим сперва сумму

$$S_N = \sum_{x=k_{2\nu}+1}^N e^{2\pi i \alpha q^x} \quad (m \geq 1 - \text{целое}), \quad (10)$$

где $k_{2\nu} < N \leq k_{2\nu+1} - r_\nu$, и $r_\nu \rightarrow \infty$ при неограниченном возрастании ν . Из определения α следует, что на интервале суммирования

$$\{\alpha q^x\} = \{\alpha' q^x\} + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}, \quad |\theta_x| \leq 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |S_N| &= \left| \sum_{x=k_{2\nu}+1}^N e^{2\pi i m \left(\alpha' q^x + \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}} \right)} \right| \leq \left| \sum_{x=k_{2\nu}+1}^N e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \sum_{x=k_{2\nu}+1}^N \left| 1 - e^{2\pi i m \frac{\theta_x}{q^{r_\nu}}} \right|, \\ |S_N| &\leq \left| \sum_{x=1}^{k_{2\nu}} e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \left| \sum_{x=1}^N e^{2\pi i m \alpha' q^x} \right| + \frac{N - k_{2\nu}}{q^{r_\nu}} \cdot 2\pi m. \end{aligned}$$

Пользуясь определением r_ν и тем, что $\alpha' \in L$, получим отсюда

$$S_N = o(N).$$

Для оценки суммы

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x}$$

определим s из условия $k_{2s-1} \leq P < k_{2s+1}$. Возможны два случая: $P \leq k_{2s} + k_{2s-2}$ и $P > k_{2s} + k_{2s-2}$.

В первом случае

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x=1}^P \right| &= \left| \sum_1^{k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} + \sum_{k_{2s-1}-k_{2s-2}+1}^P \right| \leq \\ &\leq k_{2s-2} + \left| \sum_{k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} \right| + P - k_{2s-1} + k_{2s-2}. \end{aligned}$$

и, так как $P \leq k_{2s} + k_{2s-2}$, получим

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| \leq 3k_{2s-2} + (k_{2s} - k_{2s-1}) + \left| \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}-k_{2s-2}} e^{2\pi i m \alpha q^x} \right|.$$

Применим оценку суммы (10) при $N = k_{2s-1} - k_{2s-2}$ для $\nu = s - 1$ и используем условия (8). Тогда

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| = o(k_{2s-1}) = o(P). \tag{11}$$

Во втором случае

$$\left| \sum_{x=1}^P \right| = \left| \sum_1^{k_{2s}} + \sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s}-2} + \sum_{P-k_{2s}-2+1}^P \right| \leq \left| \sum_1^{k_{2s}} \right| + \left| \sum_{k_{2s}+1}^{P-k_{2s}-2} \right| + k_{2s-2}.$$

Применяя оценку суммы (10) при $N = P - k_{2s}$, $\nu = s$ и оценку (11) при $P = k_{2s}$, получим

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| = o(k_{2s}) + o(P - k_{2s}) = o(P).$$

Таким образом, оценка (11) справедлива для всех P , и, по критерию Вейля (7), функция αq^x равномерно распределена.

§ 2. Для всякого α , принадлежащего множеству L , в силу равномерности распределения дробных долей $\{\alpha q^x\}$, будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P). \tag{12}$$

Покажем, что, как и в случае линейной функции, для всех $\alpha \in L$ оценку (12) нельзя улучшить.

ТЕОРЕМА 1. *Какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P)$, для которой $\lim_{P \rightarrow \infty} \varepsilon(P) = 0$, найдется $\alpha \in L$ такое, что*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Доказательство. Пусть $\alpha' = 0, \delta' \dots \delta'_k \dots$ — какое-нибудь из чисел множества L . Определим числа k , рекуррентными соотношениями

$$k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}], \quad k_{2s+1} = k_{2s}^2, \quad k_1 = 2. \tag{13}$$

Выберем, наконец, $\alpha = 0, \delta_1 \dots \delta_k \dots$, где

$$\delta_k = \begin{cases} \delta'_k & \text{при } k_{2s} < k \leq k_{2s+1}, \\ q-1 & \text{при } k_{2s-1} < k \leq k_{2s}. \end{cases} \quad (14)$$

Число α удовлетворяет условиям леммы 2 и, следовательно, принадлежит множеству L .

Допустим, что для всякого $\alpha \in L$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \varepsilon(P)). \quad (15)$$

Применим лемму 1 для случая $\mu = 1$:

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_{x+1} + \frac{\theta}{q-1} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x + O(1). \quad (16)$$

Подсчитаем сумму дробных долей αq^x для α , построенного, согласно (14), при $P = k_{2s}$:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1).$$

Согласно допущению (так как $\alpha \in L$), получим

$$\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-1} \varepsilon(k_{2s-1})).$$

Далее, в силу (14),

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} (q-1) = k_{2s} - k_{2s-1}.$$

Таким образом*,

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} = \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{2} (k_{2s} - k_{2s-1}) + O(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})).$$

В силу (13), $k_{2s} - k_{2s-1} > k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} - 1$ и при достаточно большом s будет

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} > \frac{1}{3} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} > \frac{1}{4} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})} = \Omega(k_{2s} \cdot \varepsilon(k_{2s})).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим теперь вопрос о величинах $\alpha \in L$, для которых сумма дробных долей функции αq^x наиболее близка к своему среднему значению $\frac{P}{2}$.

* Здесь и далее, без ограничения общности, можно считать $P \cdot \varepsilon(P) \rightarrow \infty$, при этом монотонно; стремление $\varepsilon(P)$ к нулю также будем считать монотонным.

ТЕОРЕМА 2. Для всякой функции $\varphi(P)$, как угодно медленно стремящейся к бесконечности при неограниченном возрастании P , найдется $\alpha \in L$ такое, что

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(\varphi(P)); \tag{17}$$

ни для какого $\alpha \in L$ оценка (17) не может быть улучшена до $O(1)$.

Доказательство. Для построения величины α , удовлетворяющей условию теоремы, используем системы $\rho'_n(q)$, введенные в главе 1 [см. (15)]. Выберем

$$\alpha = 0, \underbrace{\rho'_1(q) \dots \rho'_1(q)}_{\psi(1)} \underbrace{\rho'_2(q) \dots \rho'_2(q)}_{\psi(2)} \dots \underbrace{\rho'_n(q) \dots \rho'_n(q)}_{\psi(n)} \underbrace{\rho'_{n+1}(q) \dots}_{\psi(n+1)} \tag{18}$$

Каждый знак каждого $\rho'_n(q)$ понимается здесь как очередной знак q -ичного разложения α ; рядом стоящие $\rho'_n(q)$ одинаковы и первые n знаков в $\rho'_{n+1}(q)$ ($n=1, 2, \dots$) выбраны совпадающими с первыми n знаками $\rho'_n(q)$, наконец, $\psi(n) > 0$ — произвольная монотонная целочисленная функция, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$. Тогда [см. (3), теорема 5] функция αq^x равномерно распределена и, следовательно, $\alpha \in L$.

Подсчитаем сумму первых P знаков в разложении (18). Обозначим общее число знаков в (18) до первого из $\rho'_{n+1}(q)$ через T_n . Так как каждое $\rho'_n(q)$ состоит из q^n знаков, то для T_n получим

$$T_n = \sum_{\nu=1}^n \psi(\nu) q^\nu. \tag{19}$$

Каждый из знаков $0, 1 \dots q-1$ в системе $\rho'_n(q)$ встречается q^{n-1} раз, следовательно, сумма знаков для одной системы $\rho'_n(q)$ будет

$$q^{n-1} \frac{q(q-1)}{2} = \frac{q-1}{2} \cdot q^n.$$

Определим k из условия $T_k \leq P < T_{k+1}$. Тогда

$$P = T_k + r q^{k+1} + r_1, \quad 0 \leq r < \psi(k+1), \quad 0 \leq r_1 < q^{k+1}.$$

Обозначая знаки в (18) через $\delta_1, \delta_2, \dots$, получим

$$\sum_{x=1}^P \delta_x = \sum_1^{T_k} + \sum_{T_k+1}^{T_k+r q^{k+1}} + \sum_{T_k+r q^{k+1}+1}^P = \sum_{\mu=1}^k \frac{q-1}{2} q^\mu \psi(\mu) + r \frac{q-1}{2} q^{k+1} + O(q^k);$$

$$\sum_{x=1}^P \delta_x = \frac{q-1}{2} (T_k + r q^{k+1}) + O(q^k) = \frac{q-1}{2} P + O(q^k).$$

В силу (16), теперь будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x + O(1) = \frac{P}{2} + O(q). \tag{20}$$

Выберем функцию $\psi(k)$ растущей настолько быстро, чтобы выполнялось условие $\psi(\sqrt{\ln \varphi(k)}) > k$. Тогда

$$\psi(\sqrt{\ln \varphi(P)}) > P \geq T_h \geq \psi(k), \quad \ln \sqrt{\varphi(P)} > k, \quad e^{k^2} < \varphi(P).$$

Но $q^k = o(e^{k^2})$, так что соотношение (20) примет вид

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P))$$

и так как, в силу (18), $\alpha \in L$, получаем первое утверждение теоремы.

Докажем теперь невозможность улучшения оценки (17). Действительно, допустим, что для некоторого $\alpha \in L$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = O(1).$$

Пусть это α задано разложением

$$\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \dots \quad (21)$$

Тогда, в силу (16), получим

$$\frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{P}{2} = O(1),$$

т. е. существует M такое, что для всех P

$$\left| \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{P}{2} \right| < M. \quad (22)$$

Но из $\alpha \in L$ следует, что дробные доли функции αq^x расположены на $(0,1)$ всюду плотно, так что в разложении (21) для любого целого N встретится группа из N подряд идущих знаков, равных $q-1$. Пусть такая группа начинается с $k = P_0 + 1$. Выберем $N = 4M$ и положим $P = P_0 + N$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{P}{2} &= \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P_0} \delta_x + 4M - \frac{P_0 + 4M}{2} = \\ &= \left(\frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^{P_0} \delta_x - \frac{P_0}{2} \right) + 2M > M, \end{aligned}$$

что противоречит (22).

Таким образом, оценка (17) не может быть улучшена, чем теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Почти для всех α порядок разности $\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2}$ равен $\sqrt{P \ln \ln P}$.

Действительно, из результатов А. Я Хинчина (2) непосредственно

следует, что порядок разности $\sum_{x=1}^P \delta_x - \frac{q-1}{2} P$ почти для всех α равен $\sqrt{P \ln \ln P}$. Но, по лемме 1, при $\mu = 1$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} = \frac{1}{q-1} \sum_{x=1}^P \delta_x + O(1).$$

Объединяя эти результаты, приходим к вышеприведенному утверждению.

Обозначим через C множество иррациональных чисел отрезка $(0,1)$ и сопоставим теоремы для линейной и показательной функций.

1°. Для каждого $\alpha \in C$ (и соответственно $\alpha \in L$)

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = o(P), \quad \sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(P),$$

причем для всех α , принадлежащих C и, соответственно, L , эти оценки нельзя улучшить.

2°. Существуют α из C и, соответственно из L такие, что

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha x\} - \frac{P}{2} = O(\ln P), \quad \sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

где $\varphi(P) \rightarrow \infty$ как угодно медленно; дальнейшее улучшение этих оценок невозможно.

Результаты 1° и 2° позволяют предположить, что среднее отклонение $\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\}$ от $\frac{P}{2}$ будет меньше, чем для линейной функции, однако, как показывает замечание, справедливо противоположное утверждение:

3°. Почти для всех α отклонение суммы $\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\}$ от $\frac{P}{2}$ характеризуется функцией $\sqrt{P \ln \ln P}$ и, таким образом, значительно больше, чем соответствующее отклонение суммы $\sum_{x=1}^P \{\alpha x\}$ (которое, в силу (3) и (4), характеризуется функцией $\ln P$).

§ 3. Как показано в (4), из равномерности распределения функции αq^x ($q \geq 2$ — целое) следует, что для любого целого $\mu > 1$ функция $\alpha q^{\mu x}$ также равномерно распределена. Таким образом, если при любом целом $m \neq 0$ оценка тригонометрической суммы

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^{\mu x}} = o(P) \quad (23)$$

справедлива для $\mu = 1$, то она справедлива и для всех целых $\mu > 1$. Рассмотрим, обладают ли аналогичным свойством суммы дробных долей.

Пусть при $P \rightarrow \infty$ $\varphi(P) \rightarrow \infty$ сколь угодно медленно и α построено как в теореме 2. Тогда для $\mu = 1$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)). \quad (24)$$

Покажем, что в отличие от сумм Вейля (23) для сумм дробных долей из выполнения равенства (24) при $\mu = 1$ не следует справедливость его для всех $\mu > 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Каковы бы ни были положительные функции $\varepsilon(P)$ и $\varphi(P)$, при возрастающем P как угодно медленно стремящиеся соответственно к нулю и к бесконечности, найдется $\alpha \in L$, для которого*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)) \text{ и } \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P\varepsilon(P)).$$

Доказательство. Пусть целые $k_1 < k_2 < \dots$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}], \quad k_1 = 2 \quad (25)$$

и $\alpha' = 0$, $\delta'_1 \dots \delta'_k \dots$ построено, как в теореме 2. Выберем $\alpha = 0$, $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \dots$, где

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_k & \text{для } k_{2s} < k \leq k_{2s+1}, \\ 0 & \text{для четных } k \text{ из интервала } (k_{2s-1}, k_{2s}), \\ q-1 & \text{для нечетных } k \text{ из интервала } (k_{2s-1}, k_{2s}). \end{cases}$$

Из леммы 2 следует, что функция αq^x равномерно распределена. Оценим сумму дробных долей

$$S_1 = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\}.$$

Выберем s из условия $k_{2s-1} \leq P < k_{2s+1}$ и рассмотрим сперва случай $P \leq k_{2s}$:

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s-1}+1}^P \{\alpha q^x\}.$$

Применяя лемму 1 при $\mu = 1$ и пользуясь определением величин δ_k , получим

$$\begin{aligned} S_1 &= O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^P \delta_x = \\ &= \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta'_x + \frac{P - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}). \end{aligned}$$

Снова применим лемму 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha' q^x\} + \frac{P - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}) = \\ &= \frac{k_{2s-1}}{2} + o(\varphi(k_{2s-1})) + \frac{P - k_{2s-1}}{2} + O(k_{2s-2}). \end{aligned}$$

Но, в силу (25), $k_{2s-2} = o(\varphi(k_{2s-1}))$, так что

$$S_1 = \frac{P}{2} + o(\varphi(k_{2s-1})) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)) \quad (k_{2s-1} \leq P \leq k_{2s}). \quad (26)$$

Пусть теперь $P > k_{2s}$.

$$S_1 = \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} + \sum_{x=k_{2s}+1}^P \{\alpha q^x\}.$$

Применим к первой сумме справа оценку (26):

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{k_{2s}}{2} + o(\varphi(k_{2s})) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^P \delta_x = \frac{k_{2s}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s}+1}^P \delta'_x + o(\varphi(k_{2s})) = \\ &= \frac{k_{2s}}{2} + \sum_{x=1}^P \{\alpha' q^x\} - \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha' q^x\} + o(\varphi(k_{2s})) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)). \end{aligned}$$

Объединяя этот результат с (26), получим для всех P

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

Для доказательства второго утверждения теоремы выберем $P_1 = \left[\frac{k_{2s-1}}{2} \right]$,

$P_2 = \left[\frac{k_{2s}}{2} \right] - 1$ и оценим сумму

$$S_2 = \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{2x}\}.$$

Допустим, что для всякого P будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \varepsilon(P)). \quad (27)$$

Применим лемму 1 с $\mu = 2$:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha q^{2x}\} = \\ &= \frac{P_1}{2} + \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2} \right) + O(P_1 \varepsilon(P_1)). \end{aligned}$$

Из определения величин δ_h и выбора P_1 и P_2 следует

$$\sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+1} = (P_2 - P_1)(q-1), \quad \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{2x+2} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{P_1}{2} + \frac{q}{q+1} (P_2 - P_1) + O(P_1 \varepsilon(P_1)) = \\ &= \frac{P_2}{2} + \frac{q-1}{q+1} (P_2 - P_1) + O(k_{2s-1} \varepsilon(k_{2s-1})). \end{aligned}$$

* Функцию $\varphi(P)$ всюду можно считать монотонной.

Определим k из условия $T_k \leq \mu P < T_{k+1}$; тогда

$$\begin{aligned} \mu P &= T_k^2 + 2N(k+1)!^2 q^{k+1} + R, \\ 0 &\leq N < \psi(k+1), \quad 0 \leq R \leq 2(k+1)!^2 q^{k+1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Пусть ν — произвольное целое из интервала $1 \leq \nu \leq \mu$ и $\mu \leq n$. Отметим в r_n знаки по арифметической прогрессии с разностью μ , начиная с ν -го знака. Таким образом, будут отмечены ν -й, $\nu + \mu$ -й, $\nu + 2\mu$ -й знаки и т. д. Подсчитаем сумму отмеченных знаков. Рассмотрим сперва совокупность знаков вида

$$\underbrace{\rho'_n \dots \rho'_n}_n \underbrace{\rho'_n \dots \rho'_n}_n \dots \underbrace{\rho'_n \dots \rho'_n}_n \quad (31)$$

Число знаков в каждой группе $\underbrace{\rho'_n \dots \rho'_n}_{n!}$ кратно μ , следовательно, во второй такой группе первым будет отмечен $\nu - 1$ -й знак и т. д., пока (перед $\nu + 1$ -й группой) не будет отмечен ноль, разделяющий эти группы. В $\nu + 1$ -й группе будет отмечен μ -й знак, затем $\mu - 1$ -й и т. д. до $\nu + 1$ -го в последней.

Таким образом, совокупность отмеченных знаков совпадает с совокупностью всех знаков, содержащихся в группе $\rho'_n \dots \rho'_n 0$. Так как сумма знаков в ρ'_n равна $q^n \frac{q-1}{2}$, то сумма знаков, отмеченных в (31), будет

$$\frac{1}{2} n! q^n (q - 1). \tag{32}$$

В первой половине r_n содержится $\frac{n!}{\mu}$ групп (31), следовательно, сумма знаков в этой половине равна

$$\frac{1}{2\mu} n!^2 q^n (q - 1).$$

Рассмотрим теперь совокупность знаков

$$\underbrace{\rho'_n \rho'_n \dots \rho'_n}_n \underbrace{\rho'_n \rho'_n \dots \rho'_n}_n \dots \underbrace{\rho'_n \rho'_n \dots \rho'_n}_n \quad (33)$$

В первом из ρ'_n первым отмечен ν -й знак, во втором — $\nu + 1$ -й и т. д. до $\nu - 1$ -го в последнем. Очевидно, сумма знаков, отмеченных в (33), совпадает с суммой знаков в группе $\underbrace{\rho_n \rho'_n \dots \rho'_n}_{n!}$. Будем пользоваться толь-

ко теми системами ρ'_n , которые начинаются с нуля. Тогда знак, отброшенный в ρ_n , равен нулю и сумма знаков в $\rho_n \rho'_n \dots \rho'_n$ совпадет с (32).

Таким образом, суммы отмеченных знаков в первой и второй половине r_n одинаковы и сумма всех знаков, отмеченных в r_n , будет равна

$$\frac{1}{\mu} n!^2 q^n (q - 1).$$

Перейдем к оценке внутренней суммы в (29).

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+\nu} &= \frac{q-1}{\mu} (\mu!^2 q^\mu \psi(\mu) + \dots + k!^2 q^k \psi(k) + \\ &+ (k+1)!^2 q^{k+1} N) + O(R). \end{aligned}$$

Используя (30), получим

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \delta_{\mu x+\nu} &= \frac{q-1}{2} P + O(R), \\ S_\mu &= \frac{1}{q^\mu - 1} \cdot \frac{q-1}{2} P \sum_{\nu=1}^{\mu} q^{\mu-\nu} + O(R) = \frac{P}{2} + O(R). \end{aligned} \quad (34)$$

Но $\mu P \geq T_k \geq 2k!^2 q^k \psi(k)$ и для достаточно больших k $\psi(k) < P$.

Далее, как в теореме 2, получим $e^{k^2} < \varphi(P)$.

Таким образом,

$$R < 2(k+1)!^2 q^{k+1} = o(e^{k^2}) = o(\varphi(P))$$

и из (34) получим

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)) \quad (\mu = 1, 2, \dots) \quad (35)$$

Рассмотрим теперь величины $\alpha \in L$, для которых сумма дробных долей $\{\alpha q^x\}$ далека от среднего значения $\frac{P}{2}$. Согласно теореме 1, какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P)$, как угодно медленно стремящаяся к нулю при $P \rightarrow \infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что для $\mu = 1$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Сохранится ли это равенство для всех $\mu > 1$, если оно выполняется при $\mu = 1$? Отрицательный ответ дает следующая

ТЕОРЕМА 5. *Как бы медленно ни стремились функции $\varphi(P) \rightarrow \infty$ и $\varepsilon(P) \rightarrow 0$ при $P \rightarrow \infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^x\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)) \text{ и } \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)).$$

Доказательство. Пусть для $\alpha' = 0, \delta'_1 \dots \delta'_k \dots$ выполняется соотношение (35) ($\alpha' \in L$). Выберем целые $k_1 < k_2 < \dots$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(k_{2s+1}) > k_{2s}^2, \quad k_{2s} = k_{2s-1} + [k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}], \quad k_1 = 2.$$

Построим $\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \dots$, где для четных и нечетных k из интервала (k_{2s-1}, k_{2s}) последовательности знаков δ_k совпадают соответственно с периодическими последовательностями

$$\underbrace{q-1, q-1, q-1, 1, q-1, q-1, q-1, 1, \dots}_{(k_{2s-1} < k \leq k_{2s}; k - \text{четно})}$$

$$\underbrace{q-1, 0, q-2, 0, q-1, 0, q-2, 0 \dots}_{(k_{2s-1} < k \leq k_{2s}; k - \text{нечетно})}$$

и где для k из интервалов (k_{2s}, k_{2s+1}) будет $\delta_k = \delta'_k$.

В силу леммы 2, $\alpha \in L$.

Оценим сумму $\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} &= \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \{\alpha q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-2}+1}^{k_{2s-1}} \delta_x + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + O(1) = \\ &= O(k_{2s-2}) + \frac{1}{q-1} \left(\sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \delta'_x - \sum_{x=1}^{k_{2s-2}} \delta'_x \right) + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \\ &= O(k_{2s-2}) + \sum_{x=1}^{k_{2s-1}} \{\alpha' q^x\} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x = \\ &= \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \sum_{x=k_{2s-1}+1}^{k_{2s}} \delta_x + o(\varphi(k_{2s-1})). \end{aligned}$$

Разбивая сумму $\sum \delta_x$ на группы по восемь слагаемых и пользуясь определением δ_k , получим

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} &= \frac{k_{2s-1}}{2} + \frac{1}{q-1} \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} \cdot 5(q-1) + o(\varphi(k_{2s-1})) = \\ &= \frac{k_{2s}}{2} + \frac{k_{2s} - k_{2s-1}}{8} + o(\varphi(k_{2s-1})). \end{aligned}$$

В силу произвольно медленного роста функции $\varphi(k)$, можно для $k \leq P$ считать $\varphi(k) = o(P \cdot \varepsilon(P))$, следовательно,

$$\begin{aligned} &\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} = \\ &= \frac{1}{8} k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})} + o(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) > \frac{1}{9} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})}, \end{aligned}$$

и мы получаем первое утверждение теоремы:

$$\sum_{x=1}^{k_{2s}} \{\alpha q^x\} - \frac{k_{2s}}{2} = \Omega(k_{2s} \varepsilon(k_{2s})) \quad (P = k_{2s}).$$

Оценим теперь сумму

$$S_2 = \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\}. \quad (36)$$

Пусть s определяется условием $k_{2s+1} \leq 2P < k_{2s+1}$.

Рассмотрим сперва случай $2P \leq k_{2s}$. Пусть $P_1 = \left[\frac{k_{2s}-2}{2} \right]$ и $P_2 = \left[\frac{k_{2s}-1}{2} \right] - 1$. Разбивая в (36) интервал суммирования и применяя лемму 1 с $\mu = 2$, получим

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+1} + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta'_{2x+2} \right) + \\ &+ \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_2+1}^P \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_2+1}^P \delta_{2x+2} \right) + O(1). \end{aligned}$$

Разобьем две последние суммы на группы по четыре слагаемых, тогда

$$\begin{aligned} S_2 &= O(P_1) + \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1} (q(2q-3) + 3q-2) \frac{P-P_2}{4} = \\ &= \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha' q^{2x}\} + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1) = \frac{P_2}{2} + o(\varphi(P_2)) + \frac{P-P_2}{2} + O(P_1). \end{aligned}$$

Таким образом, при $k_{2s-1} \leq 2P \leq k_{2s}$

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} = \frac{P}{2} + O(P_1) + o(\varphi(P_2)) = \frac{P}{2} + o(\varphi(P)). \quad (37)$$

Пусть теперь $2P > k_{2s}$; обозначим $P_3 = \left[\frac{k_{2s}}{2} \right] - 1$.

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} = \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha q^{2x}\} + \frac{1}{q^2-1} \left(q \sum_{x=P_3+1}^P \delta_{2x+1} + \sum_{x=P_3+1}^P \delta_{2x+2} \right) + O(1).$$

Пользуясь (37), получим

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} &= \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \sum_{x=1}^P \{\alpha' q^{2x}\} - \sum_{x=1}^{P_3} \{\alpha' q^{2x}\} = \\ &= \frac{P_3}{2} + o(\varphi(P_3)) + \frac{P}{2} + o(\varphi(P)) - \frac{P_3}{2} = \frac{P}{2} + o\left(\varphi\left(\frac{P}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Итак, всегда

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{2x}\} - \frac{P}{2} = o(\varphi(P)),$$

чем теорема доказана полностью.

Как и раньше, возникает вопрос, существуют ли вообще величины $\alpha \in L$, для которых при всех целых $\mu \geq 1$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)),$$

где $\varepsilon(P)$ произвольно медленно стремится к нулю, когда P неограниченно возрастает? Легко показать, что величины α , построенные в теореме 1, обладают указанным свойством.

ТЕОРЕМА 6. *Какова бы ни была положительная функция $\varepsilon(P) \rightarrow 0$ при $P \rightarrow \infty$, найдется $\alpha \in L$ такое, что для всех целых $\mu \geq 1$ будет*

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = \Omega(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Доказательство. Выберем α как в теореме 1. Допустим, что при некотором $\mu \geq 1$ будет

$$\sum_{x=1}^P \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P}{2} = O(P \cdot \varepsilon(P)).$$

Обозначим $P_1 = \left[\frac{k_{2s-1}}{\mu} \right]$ и $P_2 = \left[\frac{k_{2s}}{\mu} \right] - 1$.

Пользуясь леммой 1, получим

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} &= \sum_{x=1}^{P_1} \{\alpha q^{\mu x}\} + \frac{1}{q^\mu - 1} \sum_{v=1}^{\mu} q^{\mu-v} \sum_{x=P_1+1}^{P_2} \delta_{\mu x+v} + O(1) = \\ &= \frac{P_1}{2} + O(P_1 \cdot \varepsilon(P_1)) + \frac{q-1}{q^\mu - 1} (P_2 - P_1) \sum_{v=1}^{\mu} q^{\mu-v}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{P_2} \{\alpha q^{\mu x}\} - \frac{P_2}{2} &= \frac{P_2 - P_1}{2} + O(P_1 \cdot \varepsilon(P_1)) = \\ &= \frac{k_{2s-1} \sqrt{\varepsilon(k_{2s-1})}}{2\mu} + O(k_{2s-1} \cdot \varepsilon(k_{2s-1})) > \frac{1}{3\mu} k_{2s} \sqrt{\varepsilon(k_{2s})} = \Omega(P_2 \varepsilon(P_2)). \quad (38) \end{aligned}$$

Но (38) противоречит допущению, чем теорема доказана.

Поступило
13. IV. 1950

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Хинчин А. Я., Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen, Math. Zeit., 18 (1923), 289 — 306.
- ² Хинчин А. Я., Über dyadische Brüche, Math. Zeit., 18 (1923), 109 — 116; Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. 6 (1924), 9 — 20; Асимптотические законы теории вероятностей, гл. V, М. — Л., 1936.

- ³ Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 215 — 238.
 - ⁴ Шапиро-Пятецкий И. И., О законах распределения дробных долей показательной функции, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 47—52.
 - ⁵ Ostrowski A., Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, Abh. Hamb. Universität, 1 (1921), 77 — 98.
 - ⁶ Good I. J., Normal recurring decimals, Journ. Lond. Math. Soc., 213, N 83 (1946), 167 — 169.
 - ⁷ Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Ann., 77 (1916), 313 — 352.
 - ⁸ De Bruijn N. G., A combinatorial problem, Kon. Ned. Akad. v. Wet., 49, 7 (1946), 758 — 764.
-