

# AzAR y AuTómataS

Verónica Becher

Grupo KAPOW (Knowledgeable Algorithms for Problems on Words)  
Departamento Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA  
Laboratoire International Associé SINFIN Université Paris Diderot-CNRS/UBA-CONICET



DÍA DE LA INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Viernes 15 de Marzo de 2019

azar - aléatoire - Zufall - rasgelelik - satunnaisuuden - slumpmässighet - randomness - aleatorietà

Todos tenemos una idea intuitiva acerca de lo que es el azar, típicamente relacionada con los “juegos de azar” o con la “suerte”...

En castellano azar y aleatoriedad son sinónimos.

En inglés se dice “random”.

AzaR y AuTómatas

Verónica Becher

## La suerte es loca

¿Creerían que se obtienen echando una moneda para cada posición?

111111111111111111111111111111111111... ✗  
¡Son todos unos!

01001000100001000001000000100000001... ✗  
¡Esta secuencia tiene un patrón!

00101001010001101110100010010101111...

Azar es **imposibilidad de predecir**, es **falta de patrón**.

AzaR y AuTómatas

Verónica Becher

# La suerte es equitativa (a la larga)

Azar es **imposibilidad de predecir**, es **falta de patrón**.

Entonces cara y ceca deben ocurrir, a la larga, la misma cantidad de veces

Sino, podríamos aprovecharnos del desvío y bastantes veces podríamos predecir bien.

AzaR y AuTómatas

Verónica Becher

## La suerte es equitativa (a la larga)

En vez de echar una moneda repartamos cartas.

Si jugamos el suficiente tiempo, y nadie hace trampa, alguna vez me tocarán el ancho de espadas, el ancho de basto y el 7 de espadas.

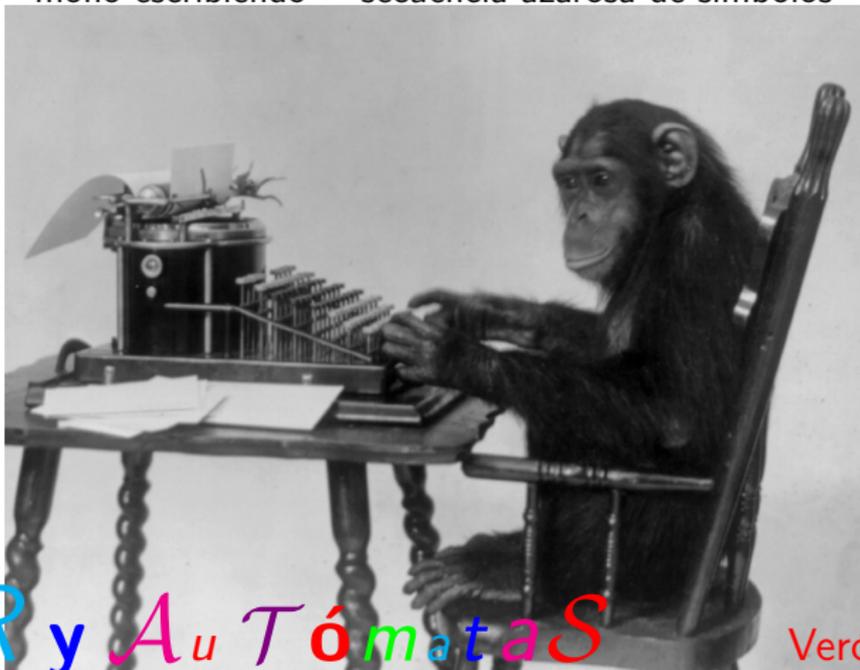


# Un mono y una máquina de escribir

Teorema (émile Borel 1913)

*Si un mono se sienta en una máquina de escribir por siempre jamás escribirá todos los posibles textos, infinitas veces cada uno.*

mono escribiendo = secuencia azarosa de símbolos



AzaRy AuTómatas

Verónica Becher

Émile Borel. La mécanique statique et l'irréversibilité.  
*Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 1913, 3 (1), pp.189-196.

*[...] Concevons qu'on ait dressé un million de singes à frapper au hasard sur les touches d'une machine à écrire et que, sous la surveillance de contremaîtres illettrés, ces singes dactylographes travaillent avec ardeur dix heures par jour avec un million de machines à écrire de types variés. Les contre-maitres illettrés rassembleraient les feuilles noircies et les relieraient en volumes. Et au bout d'un an, ces volumes se trouveraient renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde.*

... Burns tenía mil monos con mil máquinas de escribir



AzaRy AuTómataS

Verónica Becher

## Sobre el azar

- ▶ ¿Hay una definición matemática de **azar**?

*AzaR y AuTómatas*

## Sobre el azar

- ▶ ¿Hay una definición matemática de **azar**?
- ▶ ¿Podemos dar **ejemplos**?

*AzaR y AuTómatas*

# Sobre el azar

- ▶ ¿Hay una definición matemática de **azar**?
- ▶ ¿Podemos dar **ejemplos**?
- ▶ ¿Hay **grados de azar**?

*AzaR y AuTómatas*

## Sobre el azar

- ▶ ¿Hay una definición matemática de **azar**?
- ▶ ¿Podemos dar **ejemplos**?
- ▶ ¿Hay **grados de azar**?
- ▶ ¿Puede una **computadora** producir una secuencia puramente al azar?

# Sobre el azar

- ▶ ¿Hay una definición matemática de **azar**?
- ▶ ¿Podemos dar **ejemplos**?
- ▶ ¿Hay **grados de azar**?
- ▶ ¿Puede una **computadora** producir una secuencia puramente al azar?
- ▶ ¿Podemos garantizar azares **independientes**?

AzaR y AuTómatas

## Definición matemática de azar

Azar es imposibilidad de predecir. Equivalentemente, azar es imposibilidad de abreviar, imposibilidad de comprimir.  
Pero ...

*AzaR y AuTómatas*

## Definición matemática de azar

Azar es imposibilidad de predecir. Equivalentemente, azar es imposibilidad de abreviar, imposibilidad de comprimir. Pero ... ¿Para qué habilidades?

Aquí entran en escena las ciencias de la computación, ya que hay distintos modelos de cómputo.

*AzaR y AuTómatas*

Verónica Becher

## Modelos de cómputo

Distintos modelos de cómputo tienen distintas capacidades de resolver problemas.

- ▶ Autómatas finitos
- ▶ Autómatas de pila
- ▶ Las computadoras actuales (Máquinas de Turing)



AzARy AuTómatas

Verónica Becher

# Definición matemática de azar

## Definición

*Una secuencia es azarosa (para los autómatas de la clase  $\mathcal{C}$ ) cuando, esencialmente, la única forma de describirla (mediante un autómata de la clase  $\mathcal{C}$ ) es nombrando explícitamente cada uno de sus símbolos.*

AzaR y AuTómatas

## Grados de azar

**azar puro:** impredecibilidad/incompresibilidad para máquinas de Turing.

**azar básico:** impredecibilidad/incompresibilidad para autómatas finitos.

Hay azares intermedios.

*AzaR y AuTómatas*

Verónica Becher

¿Puede una computadora producir azar puro?

AzaR y AuTómatas

Verónica Becher

¿Puede una computadora producir azar puro?

**¡No!**

*AzaR y AuTómatas*

Verónica Becher

¿Puede una computadora producir azar puro?

**¡No!**

“Anyone who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin.”

John von Neumann, 1951

*AzaR y AuTómatas*

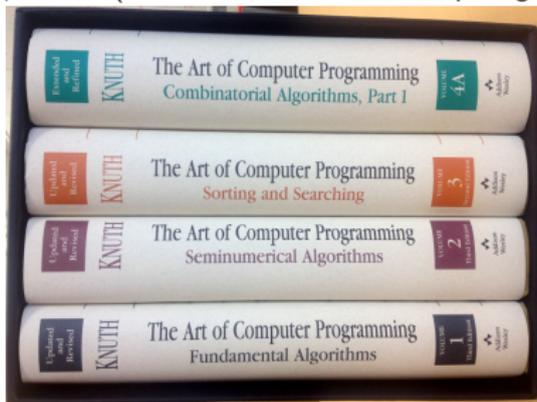
Verónica Becher

¿Puede una computadora producir azar puro?

**¡No!**

“Anyone who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin.”

John von Neumann, 1951 (cita Knuth, The Art of Computing Programming)



AzaRyAuTómatas

Verónica Becher

## Ejemplo de azar puro

¿Se te colgó la computadora?

AzaR y AuTómatas

Verónica Becher

## Ejemplo de azar puro

¿Se te colgó la computadora?



# Ejemplos de azar puro

Teorema (Chaitin 1975, Buenos Aires)

*La probabilidad de que una computadora determinada no se cuelgue es puramente aleatoria.*



Teorema

*Las probabilidades de otros comportamientos también (números  $\Omega$ )*

AzaR y AuTómatas

Verónica Becher

# Ejemplo de azar básico, también llamado Normalidad

Teorema (Borel 1909)

*Casi todos los números tienen expansiones fraccionarias normales.*

Teorema (Champernowne, 1933)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 ... *es normal.*

Lebesgue; Siepriński; Turing; Schmidt; M. Levin; Copeland, Erdős ...

# Ejemplo de azar básico, también llamado Normalidad

Teorema (Borel 1909)

*Casi todos los números tienen expansiones fraccionarias normales.*

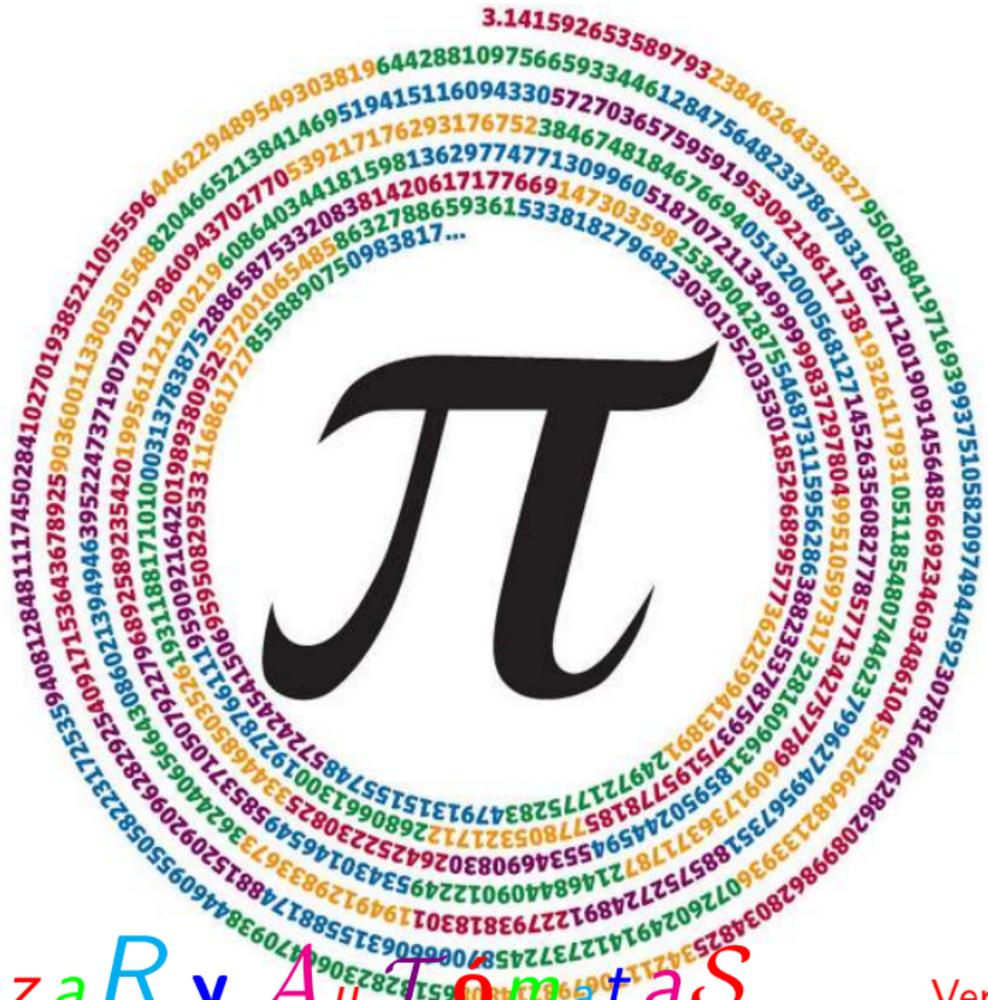
Teorema (Champernowne, 1933)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 ... *es normal.*

Lebesgue; Siepriński; Turing; Schmidt; M. Levin; Copeland, Erdős ...

Conjetura (Borel 1950)

*Todos los números irracionales algebraicos son normales en toda base.*



AzaRyAuTómatas

Verónica Becher

## Normal en una base pero no en otra

Bailey and Borwein (2012) demostraron que el número Stoneham  $\alpha_{2,3}$ ,

$$\alpha_{2,3} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}$$

es normal en base 2 pero **no** es simplemente normal en base 6.

¿Otros ejemplos de azar básico o normalidad?



<http://kapow.dc.uba.ar>

AzaR y AuTómataS

Verónica Becher

¿Otros ejemplos de azar básico o normalidad?



<http://kapow.dc.uba.ar>

Tesis de Licenciatura Cs. de la Computación de Santiago Figueira 2002.

# Del azar con dos símbolos al azar con tres símbolos



## Problema

*Dada una secuencia normal de 0s y 1s, ¿Cómo insertar 2s a lo largo de la secuencia de manera que la secuencia resultante sea normal?*

# Del azar con dos símbolos al azar con tres símbolos



## Problema

*Dada una secuencia normal de 0s y 1s, ¿Cómo insertar 2s a lo largo de la secuencia de manera que la secuencia resultante sea normal?*

## Soluciones

Tesis de Licenciatura en Cs de la Computación de Ariel Zylber, Noviembre 2017  
“Del azar con dos símbolos al azar con tres símbolos”

Tesis de Licenciatura en Cs de la Computación, Lucas Cortés, Diciembre 2018  
“ Extendiendo secuencias de Bruin a lafabetos más grandes” .

# Independencia entre secuencias



Definición (Becher, Carton, Heiber 2016)

*Dos secuencias son independientes si ninguna ayuda a comprimir/predecir la otra mediante un átómata finito.*

AzaR y AuTómataS

# Independencia entre secuencias



Definición (Becher, Carton, Heiber 2016)

*Dos secuencias son independientes si ninguna ayuda a comprimir/predecir la otra mediante un átómata finito.*

Teorema (Alvarez, Becher, Carton 2017)

*Dos secuencias normales son independientes si todas las posibles intercalaciones realizadas por autómatas finitos de dos entradas dan como salida una secuencia normal. son*

# Independencia entre secuencias



Definición (Becher, Carton, Heiber 2016)

*Dos secuencias son independientes si ninguna ayuda a comprimir/predecir la otra mediante un átómata finito.*

Teorema (Alvarez, Becher, Carton 2017)

*Dos secuencias normales son independientes si todas las posibles intercalaciones realizadas por autómatas finitos de dos entradas dan como salida una secuencia normal. son*

Problema

*Dar un ejemplo de un par de secuencias normales independientes.*

AzaR y AuTómataS

Verónica Becher

## Journals donde publicamos

Transactions of American Mathematical Society

Mathematische Annalen

Journal of Computer and System Sciences

Mathematics of Computation

Archive der Mathematik

Information Processing Letters

Advances of Applied Mathematics

Journal of Complexity

Theory of Computing Systems

Theoretical Computer Science

Journal of Symbolic Logic

Mathematical Structures in Computer Science

Proceedings of American Mathematical Society

International Mathematics Research Notices

Journal of the London Mathematical Society

Acta Arithmetica

Monatshefte für Mathematik,

Fundamenta Mathematicae

AzaRyAuTómatas

Verónica Becher

## Conferencias en las que participamos

Computability in Europe

Logic Colloquium

Meeting American Mathematical Society

Meeting Association for Symbolic Logic

Computability, Complexity and Randomness (Steering Committee)

Computability, Complexity and Analysis

AzaRyAuTómatas

Verónica Becher



Verónica Becher  
Joos Heintz  
Pablo Turjanski

AzaRy AuTómatas

Verónica Becher



Verónica Becher  
Joos Heintz  
Pablo Turjanski

En temas de azar y automatas:

Olivier Carton, Université Paris Diderot  
Serge Grigorieff, Université Paris Diderot  
Theodore Slaman, University California Berkeley

Christoph Aistleitner, TU Graz  
Yann Bugeaud, Université Strasbourg

AzaR y AuTómatas

Verónica Becher