UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Tesis de Licenciatura en Ciencias de la Computación

Collares perfectos anidados

Valeria Wodka
LU: 39/20
valewodka@gmail.com

Directora: **Verónica Becher**

5 de Septiembre de 2024

Índice

1. Breve introducción

Esta tesis se enmarca en el área de la matemática discreta, específicamente en el tema de combinatoria de palabras.

Fijemos un alfabeto A. Un collar es una cadena circular. Un collar es (n, k)-perfecto si todas la palabras de longitud n aparecen k veces en el collar, en posiciones con distinta congruencia módulo k, para cualquier convención de la posición inicial.

Un collar (n, k)-perfecto es anidado si $n = 1$, o el collar es la concatenación de $|A|$ collares $(n - 1, k)$-perfectos anidados. En 2019 Becher y Carton [3] dieron un método para construir todos los collares (n, n)-perfectos anidados en el alfabeto de 2 símbolos para n potencia de 2.

En este trabajo mostramos que para un alfabeto de más de 2 símbolos, el método de Becher y Carton no produce todos los collares (n, n)-perfectos anidados, y damos un método para construir nuevos. Específicamente nos concentramos en el alfabeto de 3 símbolos. A partir de razonar sobre la caracterización de collares perfectos anidados mediante ciclos en ciertos grafos de palabras, ideamos un método para construir collares perfectos anidados que no podían construirse con el método conocido.

La técnica principal usada en este trabajo es un análisis combinatorio elemental y la resolución de sistemas no lineales de ecuaciones, que tienen una solución sencilla.

El método de construcción que damos aquí para collares (n, n)-perfectos anidados en un alfabeto de tres símbolos, para n potencia de 2, se puede generalizar para alfabetos de más símbolos. También creemos que el método que desarrollamos admite muchas variantes que permitirán dar nuevos collares perfectos anidados. El desafío es dar métodos para construir todos los collares perfectos anidados, y contestar a la pregunta de Hofer y Larcher [5],

¿Cuántos collares perfectos anidados hay?

2. Collares perfectos anidados

Un alfabeto es un conjunto finito y no vacío de símbolos. Usaremos α para denotar su cantidad de símbolos, y, sin pérdida de generalidad, asumiremos que el alfabeto es $\{0, .., \alpha - 1\}$. Una palabra es una secuencia finita de símbolos del alfabeto. Dado un entero positivo n, el conjunto $\{0, .., \alpha - 1\}^n$ denota al conjunto de todas las palabras de longitud n en el alfabeto de α símbolos.

Una cadena circular o collar, es la clase de equivalencia de una palabra bajo rotaciones. Los collares pueden tener una posición inicial. Numeramos las posiciones de los símbolos de una palabra o collar empezando desde 0. Los llamados collares perfectos fueron presentados por primera vez en [1]. Son variantes de las conocidas secuencias de Bruijn [4].

Una secuencia de Bruijn de orden n sobre un alfabeto de tamaño α es una cadena circular de longitud α^n tal que cada palabra de longitud n aparece exactamente una vez. Por lo tanto, las secuencias de Bruijn son collares $(n, 1)$- perfectos.

Definición (Collar perfecto)**.** Dado dos enteros positivos n y k, un collar es (n, k)-perfecto si cada palabra de longitud n ocurre exactamente k veces en posiciones con distinta congruencia módulo k, para cualquier convención de la posición inicial.

Surge de la definición que los collares (n, n)-perfectos en un alfabeto de α símbolos tienen longitud $n\alpha^n$. Este es un collar $(3, 3)$-perfecto en dos símbolos y se lo llama el collar ordenado,

000 001 010 011 100 101 110 111

Notemos que cada collar $(3, 3)$-perfecto es una permutación de las palabras de longitud n, pero no toda permutación es un collar perfecto. Por ejemplo, este no es (n, n)-perfecto

000 001 010 011 100 101 111 110

Dados números enteros a y b con $a < b$, escribimos $[a, b)$ para referirnos al conjunto de números enteros desde a hasta b excluyendo a b.

Consideremos un alfabeto con α símbolos y sea n un entero positivo. Consideremos el orden lexicográfico de las palabras de longitud n. Sea $string : [0, \alpha^n) \to \{0, ..., \alpha - 1\}^n$ tal que $string(i)$ es la i-ésima palabra en el orden lexicográfico de las palabras de longitud n.

Definición (Collar definido por una permutación)**.** Sea $\pi : [0, \alpha^n)] \to [0, \alpha^n)$ una permutación. El collar denotado por π es la una cadena circular de longitud $n\alpha^n$ que es la concatenación de las palabras de longitud n en el orden determinado por π,

$$string(\pi(0))\ string(\pi(1))\ \ldots string(\pi(\alpha^n - 1)).$$

Por ejemplo, si π es la identidad, obtenemos el collar perfecto ordenado.

Los collares (n, k)-perfectos se pueden caracterizar usando grafos. Los collares (n, k)-perfectos se corresponden con ciclos hamiltonianos en los grafos $G(n, k)$, que son el producto del grafo de Bruijn de orden n con un ciclo simple de tamaño k. Dado que el grafo $G(n,k)$ es el grafo de línea de $G(n-1,k)$, cada ciclo hamiltoniano en $G(n,k)$ es un ciclo euleriano en $G(n-1,k)$.

En [1, Theorem 20] se demuestra que la cantidad de collares (n,k)-perfectos es

$$\frac{1}{k}\sum_{d_{2,k}|j|k} e(j)\phi(k/j)$$

donde $d_{2,k}$ es la mayor potencia de 2 que divide a k, $e(j) = 2^{j2^{n-1}b^{-n}}$, la cantidad de ciclos eulerianos de orden $n-1$ y ϕ es la función totiente de Euler, que $\phi(s)$ determina la cantidad de números naturales menores que s y coprimos con s.

En [3] Becher y Carton definen a los collares perfectos anidados, y dan una caracterización de los collares (n,n)-perfectos anidados mediante grafos para alfabetos arbitrarios, que describiremos en esta sección.

Definición (Collar perfecto anidado)**.** Un collar (n,k)-perfecto sobre un alfabeto de α símbolos es anidado si $n=1$ o si es la concatenación de α collares $(n-1,k)$- perfectos anidados.

En [6] M.B. Levin da un método para construir un collar (n,n)-perfecto anidado, para n potencia de 2, en cualquier alfabeto. Su método consiste en dar una permutación $\pi : [0,2^n) \to [0,2^n)$ mediante la matriz del triángulo de Pascal módulo 2.

Definición (Matriz Pascal)**.** La matriz $M \in \{0,1\}^{n\times n}$ para n potencia de 2 se define inductivamente

$$M_0 = (1) \quad \text{y} \quad M_{2^{d+1}} = \begin{pmatrix} M_{2^d} & M_{2^d} \\ 0 & M_{2^d} \end{pmatrix}$$

Levin [6, Lemma 4] demuestra que la matriz del triángulo Pascal módulo 2 tiene la propiedad de que cada submatriz cuadrada posicionada en el borde superior o en el borde derecho tiene determinante, computado en $\mathbb{Z}$, igual a 1 o -1. Esta propiedad junto con el hecho de que M es una matriz triangular superior permiten demostrar que Levin con estas matrices construye collares (n,n)-perfectos anidados en α símbolos, para cualquier entero α mayor o igual que 2.

Notación. Para cada número s entre 0 y $\alpha^n - 1$, escribimos $[s]$ para su representación en base α, como un vector en $[0,\alpha)^{n\times 1}$. Si

$$s = r_0\alpha^{n-1} + r_1\alpha^{n-2} + \ldots + r_{n-1}\alpha^0$$

con $r_0, .., r_{n-1} \in [0,\alpha)$, entonces

$$[s] = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

Vamos a referirnos al vector que se obtiene al multiplicar la matriz M por el vector v como $M[v]$. Esta multiplicación se da en $\mathbb{Z}_\alpha$.

Levin [6, Theorem 2] demuestra que, para n potencia de 2 el collar dado por la permutación $\pi : [0, \alpha^n) \to [0, \alpha^n)$ definida por $\pi(s) = t$ donde $M_n[s] = [t]$, es (n,n)-perfecto anidado.

Observación. Levin en [6] indica que su método de construcción de un collar (n,n)-perfecto anidados, para n potencia de 2 se aplica también cuando n es potencia de un número primo p, y obtiene collar (n,n)-perfecto anidado en el alfabeto de p símbolos. Estos collares tienen longitud np^n, con n potencia de p.

Sabemos que los collares (n,n)-perfectos anidados corresponden a una subclase de ciclos hamiltonianos en los grafos $G(n,n)$ que son el producto tensorial del grafo de Bruijn de palabras de longitud n y ciclos simples de longitud n. Dado que el grafo $G(n,n)$ es el grafo de línea del grafo $G(n-1,n)$ cada ciclo hamiltoniano en $G(n,n)$ es un ciclo euleriano en $G(n-1,n)$.

Por otro lado, decimos que un ciclo euleriano en $G(n,k)$ es anidado si $n=1$ o este ciclo es la unión de α ciclos hamiltonianos disjuntos, que a su vez son eulerianos anidados en $G(n-1,k)$. Los collares (n,n)-perfectos anidados se corresponden con ciclos eulerianos anidados en $G(n-1,n)$. No sabemos contar la cantidad de ciclos eulerianos anidados en $G(n,n)$.

La caracterización en grafos de collares (n,n)-perfectos anidados para n potencia de 2 funciona también cuando n es una potencia de un número primo b y el alfabeto tiene p símbolos.

2.1. Collares afines en dos símbolos

Los collares afines son collares (n,n)-perfectos para n potencias de 2 que se definen mediante una permutación que es una transformación lineal.

Definición (Collar afín)**.** Un collar es afín en α símbolos si es (n,n)-perfecto para algún n potencia de 2 y se define mediante una permutación que es una transformación lineal. Es decir, existe una matriz $M \in [0,\alpha)^{n\times n}$ y un vector $z \in [0,\alpha)^n$ tal que

$$\pi(s) = t + z \mod \alpha^n \text{ si } M[s] = [t].$$

Definición (Familia $\mathcal{P}(2)$ de matrices tipo Pascal)**.** Consideremos ahora a la familia de matrices de $n \times n$ para n potencia de 2 que se obtienen a partir de aplicar rotaciones a las columnas de M_n. Sea σ la función que mapea cada palabra $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $a_n, a_1 \ldots, a_{n-1}$ obtenidas al mover el último símbolo adelante. Como las palabras de M_n se identifican como vectores columna, la función σ se puede aplicar también a un vector columna.
Sea $t_1, \ldots, t_n$ una secuencia de enteros tal que $t_n = 0$ y $t_{i+1} \le t_i \le t_{i+1} + 1$ para cada entero $1 \le i < n$. Sean $C_1, \ldots, C_n$ las columnas de M_n, es decir, $M_n = (C_1, \ldots, C_n)$ La familia de matrices afines está compuesta por las rotaciones de M_n definidas como:

$$M_n^{t_1,\ldots,t_m} = \big(\sigma^{t_1}(C_1), \ldots, \sigma^{t_n}(C_n)\big).$$

Las siguientes son las dos posibles matrices $M_n^{t_1,\ldots,t_n}$ para $n = 2$

$$\begin{array}{cc} M_2^{0,0} & M_2^{1,0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Las siguientes son las ocho posibles matrices $M_n^{t_1,\ldots,t_n}$ para $n = 4$.

$$\begin{array}{cccc} M_4^{0,0,0,0} & M_4^{1,0,0,0} & M_4^{1,1,0,0} & M_4^{2,1,0,0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M_4^{1,1,1,0} & M_4^{2,1,1,0} & M_4^{2,2,1,0} & M_4^{3,2,1,0} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Introducimos la noción de *borde superior* e $inferior$ de una matriz $M_n^{t_1,\ldots,t_n}$, donde n es una potencia de 2. Tomemos un $M_{i,j}$ para $0 \leq i, j, < n$, éste está en el *borde superior* (o *borde inferior* respectivamente) si $M_{i,j} = 1$ y $M_{k,j} = 0$ para todo $k = 0, \ldots, i-1$ (en el caso de *borde inferior* para todo $k = i+1, \ldots, n-1$).

En [7, Corollary 1], Mereb demuestra que las matrices tipo Pascal para dos símbolos poseen la propiedad de que cada submatriz cuadrada situada en el *borde superior* o en el *borde derecho* tiene determinante, computado en $\mathbb{Z}$, igual a 1 o -1.

Por otro lado, en [2, Lemma 4], Becher y Carton establecen que las matrices tipo Pascal para dos símbolos cumplen con la siguiente propiedad respecto a sus submatrices: sean ℓ y k dos enteros tales que $0 \leq \ell < \ell + k \leq n$. La submatriz obtenida al seleccionar las k filas $\ell+1, \ell+2, \ldots, \ell+k$ y las últimas k columnas $n-k+1, \ldots, n$ de M es invertible. Cabe destacar que para $k = n$ y $\ell = 0$, la submatriz mencionada en el lema corresponde a la matriz completa $M_n^{t_1,\ldots,t_n}$, la cual también es invertible.

Adicionalmente, en [2, Lemma 5] se afirma que para una matriz de la forma $M_n^{t_1,\ldots,t_n}$, cualquier submatriz $k \times k$ obtenida mediante la selección de k filas y k columnas consecutivas, con la entrada superior derecha situada en el borde superior de M, es igualmente invertible, lo que refuerza las propiedades de invertibilidad de estas matrices en diferentes contextos.

Lema 1. *La cantidad de matrices en* $\mathcal{P}(2)$ *es* 2^{n-1}.

Demostración. Por definición sabemos que la clase de Matrices tipo Pascal para dos símbolos son el resultado de las distintas rotaciones a las columnas de la matriz Pascal. Queremos entonces contar cuántas son estas rotaciones. Cada columna C_i tiene dos posibilidades: rotarse igual cantidad de veces que C_{i+1} o rotarse una vez más que C_{i+1}. Notemos que la columna C_n al estar compuesta toda por 1's no va a ser rotada, ya que su resultado es equivalente. Tenemos entonces $n-1$ columnas con dos posibilidades de rotación en base a su columna anterior $\#\mathcal{P}(2) = 2^{n-1}$.

$\square$

Becher y Carton dan una forma de construir todos los collares (n,n)-perfectos anidados en dos símbolos para n potencia de 2.

Proposición 1 ([3, Theorem 2])**.** *Todos los collares perfectos anidados en dos símbolos son afines y hay en total* 2^{2n-1}.

Ejemplos de collares afines en dos símbolos:
Collar (2,2) afín generado por $M_2^{0,0}$ y $z = (0,0)$:

00 11 10 01

Collar (4,4) afín generado por $M_4^{0,0,0,0}$ y $z = (0,0,0,0)$:

0000 1111 1010 0101 1100 0011 0110 1001 1000 0111 0010 1101 0100 1011 1110 0001

2.2. Preguntas abiertas

Levin afirma en [6] que la matriz Pascal módulo 2 genera collares afines para alfabetos de cualquier tamaño. Hofer y Larcher se preguntan en [5] cuántos collares perfectos anidados hay para alfabetos con más de dos símbolos.

3. Collares afines en tres símbolos

Definimos a continuación la familia de matrices $\mathcal{P}(3)$ de modo tal que cada matriz de $\mathcal{P}(3)$ de origen a una permutación que defina un collar perfecto anidado en 3 símbolos.

Definición (Familia $\mathcal{P}(3)$ de matrices de tipo Pascal)**.** Sea n una potencia de 2. La familia $\mathcal{P}(3)$ de matrices de tipo Pascal es el conjunto de matrices $(p_{i,j})_{0\leq i,j<n} \in \{0,1,2\}^{n\times n}$ tales que,

$$p_{i,j} = q_{i,j}\ f_i\ c_j \pmod 3$$

donde $f_0, \ldots f_{n-1}, c_0, \ldots, c_{n-1} \in \{1,2\}$, y $(q_{i,j})_{0\leq i,j<n} \in \mathcal{P}(2)$.

Dada la matriz Pascal ($M_4^{0,0,0,0}$) consideremos $f_0 = f_1 = f_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 1$ y $f_2 = c_0 = 2$. Al multiplicar la fila 2 y la columna 0 por 2, la matriz resultante es:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1. *Sea n potencia de 2. La cantidad de collares (n,n)-perfectos anidados afines en tres símbolos obtenidos por $\mathcal{P}(3)$ y un vector z es $2^{3n-2}3^n$.*

En la siguiente sección damos la demostración.

3.1. Un lema sencillo

Lema 2. *La cantidad de matrices en $\mathcal{P}(3)$ es 2^{3n-2}.*

Demostración. Por definición de matrices tipo Pascal para 3 símbolos, estas son el resultado de multiplicar módulo 3, de todas las maneras posibles, las matrices tipo Pascal en $\mathcal{P}(2)$ por las filas $f = f_0, \ldots, f_{n-1} \in \{1,2\}$ y columnas $c = c_0, \ldots, c_{n-1} \in \{1,2\}$.

Por el Lema 1 sabemos que la cantidad de matrices tipo Pascal para 2 símbolos es 2^{n-1}. Para asegurarnos de obtener matrices tipo Pascal distintas entre sí, fijamos

$$Q = (q_{i,j})_{0\leq i,j<n} \in \{0,1,2\}^{n\times n}$$

y consideramos todas las matrices resultantes tras multiplicar sus filas y columnas. Cada $p_{i,j}$ con $0 \leq i,j < n$ depende por definición de $q_{i,j}$, f_i y c_j consideremos los posibles valores para los últimos dos:

I. $f_i = 1 \wedge c_j = 1 \to p_{i,j} \equiv q_{i,j} \pmod 3$

II. $f_i = 1 \wedge c_j = 2 \to p_{i,j} \equiv 2 \times q_{i,j} \pmod 3$

III. $f_i = 2 \wedge c_j = 1 \to p_{i,j} \equiv 2 \times q_{i,j} \pmod 3$

IV. $f_i = 2 \wedge c_j = 2 \to p_{i,j} \equiv 2 \times 2 \times q_{i,j} \equiv q_{i,j} \pmod 3$.

Dado que queremos contar todas las matrices $(p_{i,j})_{0\leq i,j<n} \in \{0,1,2\}^{n\times n}$ distintas no debemos tomar conjuntos de escalares que resulten en la misma matriz. Notemos que I y IV devuelven el mismo resultado para $p_{i,j}$ y que lo mismo ocurre con II y III. Debemos evitar que esto ocurra para la matriz completa, para ello basta con limitar a uno de los escalares $c_0, \dots c_{n-1}, f_0, \dots, f_{n-1} \in \{1,2\}$ a un valor fijo. Tomemos en este caso $c_0 = 1$.

Finalmente tenemos entonces $2n-1$ escalares que pueden tomar valores dentro de $\{1,2\}$ para cada matriz tipo Pascal para dos símbolos:

$$\#\mathcal{P}(3) = 2^{n-1} \times 2^{2n-1} = 2^{3n-2}.$$

□

Proposición 2. *Para cada matriz de $\mathcal{P}(3)$ se cumple que sus submatrices cuadradas posicionadas en el borde superior o derecho, son inversibles.*

Demostración. Levin en [6, Teorema 2] afirma que las submatrices cuadradas posicionadas en el borde superior y borde derecho de la matriz de Pascal M tiene determinante, computado en $\mathbb{Z}$ igual a 1 o -1. En [7, Corolario 1] Mereb da la demostración completa de la afirmación de Levin. Esto significa que M haciendo en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tiene la propiedad las submatrices cuadradas posicionadas en el borde superior y borde derecho son inversibles.

En [3] Becher y Carton demuestran que las matrices de $\mathcal{P}(2)$ cumplen con la propiedad de que las submatrices cuadradas posicionadas en el borde superior o en el borde derecho tienen determinante, computado en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 1 o -1. La multiplicación de las filas o las columnas por un escalar en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ preserva la propiedad de que todas las submatrices del borde superior o derecho tendrán determinante computado en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ distinto de 0. □

En [7, Corolario 2] Mereb considera todas las matrices en $\mathbb{Z}$ con la propiedad de que las submatrices cuadradas del borde superior o derecho son inversibles. Da un resultado más general que el de la Proposición 2 que implica que todas las matrices de $\mathcal{P}(3)$ tienen la propiedad de que todas las submatrices cuadradas del borde superior o derecho son inversibles en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Notar que si hubiéramos definido la familia de matrices $\mathcal{P}(3)$ tomando la matriz Pascal módulo 3, la propiedad anterior se rompe.

Ejemplo de Matriz Pascal 4×4 módulo 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede notar que esta matriz no es una rotación de columnas de una matriz triangular.

3.2. Demostración del Teorema 1

Por definición, un collar afín se construye a partir de una matriz M perteneciente a $\mathcal{P}(3)$ y un vector $z \in \{0,1,2\}^n$. Es suficiente contar las formas de combinar estos dos elementos y mostrar que se obtienen resultados distintos. Sabemos que $M[v_i] \neq M[v_j]$ para $0 \leq i, j < 3^n$ ya que usamos las matrices de $\mathcal{P}(3)$ para realizar una permutación de los vectores $v_0, \ldots, v_{3^n-1}$. Hay 2^{3n-2} matrices en $\mathcal{P}(3)$ y 3^n vectores z, por ende hay $2^{3n-2} \times 3^n$ collares afines en 3 símbolos que se obtienen a partir de las matrices de $\mathcal{P}(3)$.

□

3.3. Ejemplos de collares afines en 3 símbolos

Collar $(2,2)$ afín generado por $M_2^{0,0}$ y $z = (0,0)$:

$$00\ 11\ 22\ 10\ 21\ 02\ 20\ 01\ 12$$

Collar $(4,4)$ afín generado por $M_4^{0,0,0,0}$ y $z = (0,0,0,0)$:

$$A \begin{cases} 0000\ 1111\ 2222\ 1010\ 2121\ 0202\ 2020\ 0101\ 1212\ \} A_A \\ 1100\ 2211\ 0022\ 2110\ 0221\ 1002\ 0120\ 1201\ 2012\ \} A_B \\ 2200\ 0011\ 1122\ 0210\ 1021\ 2102\ 1220\ 2001\ 0112\ \} A_C \end{cases}$$

$$B \begin{cases} 1000\ 2111\ 0222\ 2010\ 0121\ 1202\ 0020\ 1101\ 2212\ \} B_A \\ 2100\ 0211\ 1022\ 0110\ 1221\ 2002\ 1120\ 2201\ 0012\ \} B_B \\ 0200\ 1011\ 2122\ 1210\ 2021\ 0102\ 2220\ 0001\ 1112\ \} B_C \end{cases}$$

$$C \begin{cases} 2000\ 0111\ 1222\ 0010\ 1121\ 2202\ 1020\ 2101\ 0212\ \} C_A \\ 0100\ 1211\ 2022\ 1110\ 2221\ 0002\ 2120\ 0201\ 1012\ \} C_B \\ 1200\ 2011\ 0122\ 2210\ 0021\ 1102\ 0220\ 1001\ 2112\ \} C_C \end{cases}$$

El collar afín generado por $M_4^{0,0,0,0}$ y $z = (0,0,0,0)$ es la concatenación de ABC, donde cada uno de A, B, C es un collar $(3,4)$ perfecto anidado. Y donde A_A, A_B, A_C, B_A, B_B, B_C, C_A, C_B, C_C son collares $(2,4)$ perfectos anidados.

A continuación veremos que hay más collares perfectos anidados en 3 símbolos que no son los afines.

4. Collares no afines

Dada la caracterización de los collares (n, n)-perfectos anidados como ciclos eulerianos anidados en $G(n-1, n)$, buscamos construir collares no afines a través de transformar el ciclo euleriano anidado generado por un collar afín. En el alfabeto de tres símbolos el ciclo euleriano anidado en $G(n-1, n)$ es la unión de tres caminos hamiltonianos. Esta transformación se busca mediante modificar el último camino hamiltoniano, considerando el mismo ciclo hamiltoniano, pero comenzando desde otra parte del mismo. Resulta sutil pero importante marcar que después de recorrer los primeros dos caminos hamiltonianos, todos los vértices fueron visitados dos veces, pero no todos usaron sus aristas de salida dos veces. Es precisamente esta sutileza la que nos permite definir un nuevo camino hamiltoniano alternativo al que da el collar afín. Este nuevo camino hamiltoniano resulta en un collar (n, n)-perfecto anidado.

Damos a continuación es el resultado principal de este trabajo.

Teorema 2. *Sea $\alpha = 3$, sea n una potencia de 2, y sea $\pi : [0, \alpha^n) \to [0, \alpha^n)$ una permutación que define un collar afín. Entonces, o bien $\pi \circ \rho_1$, o bien $\pi \circ \rho_2$, define un collar (n, n)-perfecto anidado no afín, donde $\rho_1, \rho_2 : [0, \alpha^n) \to [0, \alpha^n)$ son las permutaciones*

$$\rho_1(s) = \begin{cases} s, & \textit{para } s \in [0, 2\alpha^{n-1}) \\ 2\alpha^{n-1} + (s + \alpha^{n-2} \mod \alpha^{n-1}), & \textit{para } s \in [2\alpha^{n-1}, \alpha^n), \end{cases}$$

$$\rho_2(s) = \begin{cases} s, & \textit{para } s \in [0, 2\alpha^{n-1}) \\ 2\alpha^{n-1} + (s + 2\alpha^{n-2} \mod \alpha^{n-1}), & \textit{para } s \in [2\alpha^{n-1}, \alpha^n). \end{cases}$$

La misma técnica que usamos para demostrar el Teorema 2 permite demostrar un resultado similar para alfabetos de más de tres símbolos.

Observación. Damos a continuación una formulación equivalente del Teorema 2 que considera primero un collar afín y luego una rotación. Notemos que esta formulación usa permutaciones ρ_1 y ρ_2 que se definen a partir de la matriz M.

Teorema 2 (formulación alternativa)

Sea $\alpha = 3$, sea n una potencia de 2, y sea $\pi : [0, \alpha^n) \to [0, \alpha^n)$ una permutación que define un collar afín. Entonces, o bien $\rho_1 \circ \pi$, o bien $\rho_2 \circ \pi$, define un collar (n, n)-perfecto anidado no afín, donde $\rho_1, \rho_2 : [0, \alpha)^{n \times n} \times [0, \alpha^n) \to [0, \alpha^n)$ son las permutaciones

$$\rho_1(M, s) = \begin{cases} M[s], & \text{para } s \in [0, 2\alpha^{n-1}) \\ 2\alpha^{n-1} + (M[s] + \alpha^{n-2} \mod \alpha^{n-1}), & \text{para } s \in [2\alpha^{n-1}, \alpha^n), \end{cases}$$

$$\rho_2(M, s) = \begin{cases} M[s], & \text{para } s \in [0, 2\alpha^{n-1}) \\ 2\alpha^{n-1} + (M[s] + 2\alpha^{n-2} \mod \alpha^{n-1}), & \text{para } s \in [2\alpha^{n-1}, \alpha^n). \end{cases}$$

Ejemplo de transformación Consideremos las palabras ordenadas de tamaño 4, donde la notación será en base 10 en lugar de base ternaria:

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$$

A estas palabras podemos aplicarles las siguientes transformaciones:

- ρ_1, dada por la definición original del Teorema 2:

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 6$$

- π, dada por la matriz (en este caso, la matriz de Pascal 4×4):

$$0\ 3\ 8\ 4\ 7\ 2\ 6\ 1\ 5$$

El resultado de aplicar $\rho_1 \circ \pi$ según la primera definición del Teorema, o $\pi \circ \rho_1$ según la segunda definición, es el siguiente:

$$0\ 3\ 8\ 4\ 7\ 2\ 1\ 5\ 6$$

4.1. Herramientas para la demostración del Teorema 2

Notación.
$a = 0$
$b = 3^{n-1}$
$c = 2\ 3^{n-1}$
$d = 2\ 3^{n-1} + 3^{n-2}$
$e = 2\ 3^{n-1} + 2\ 3^{n-2}$.

Dado que los collares son circulares, para referirnos a la última posición del collar usaremos $a-1$, que es la posición $3^n - 1$. Usaremos también $b-1, c-1, d-1$, y $e-1$.

Notación. Dado un collar (n,n)-perfecto anidado $(M[a]+z)\dots(M[a-1]+z)$, consideraremos sus collares $(n-1,n)$-perfectos anidados de la siguiente forma: ABC donde
$A = (M[a]+z)\dots(M[b-1]+z)$
$B = (M[b]+z)\dots(M[c-1]+z)$
$C = (M[c]+z)\dots(M[a-1]+z)$
Para el collar $(n-1,n)$-perfecto anidado $C = (M[c]+z)\dots(M[a-1]+z)$, consideraremos sus collares $(n-2,n)$-perfectos anidados de la siguente forma: $C = C_A C_B C_C$ donde
$C_A = (M[c]+z)\dots(M[d-1]+z)$
$C_B = (M[d]+z)\dots(M[e-1]+z)$
$C_C = (M[e]+z)\dots(M[a-1]+z)$
Consideraremos también los siguientes:
$C' = C_B C_C C_A$
$C'' = C_C C_A C_B$
A todos estos collares perfectos anidados los llamaremos *bloque*.

Definimos un predicado al que llamamos *clash* que vamos a utilizar para saber si hay dos ocurrencias de una misma palabra en una posición congruente a un m entre 1 y $n-1$.

Definición (*clash*). Dada $(p_{i,j})_{0\leq i,j<n}$ en $\mathcal{P}(3)$ definimos el predicado:

$$clash((v,w),(x,y),m)$$

$clash((v,w),(x,y),m)$ es `Verdadero` cuando el siguiente sistema lineal de ecuaciones tiene solución:

$$\begin{array}{rcl}
v_0p_{m,0}+v_1p_{m,1}+\ldots+v_{n-1}p_{m,n-1} & = & x_0p_{m,0}+x_1p_{m,1}\ldots+x_{n-1}p_{m,n-1}\\
v_0p_{m+1,0}+v_1p_{m+1,1}+\ldots+v_{n-1}p_{m+1,n-1} & = & x_0p_{m+1,0}+x_1p_{m+1,1}+\ldots+x_{n-1}p_{m+1,n-1}\\
 & \vdots & \\
v_0p_{n-1,0}+v_1p_{n-1,1}+\ldots+v_{n-1}p_{n-1,n-1} & = & x_0p_{n-1,0}+x_1p_{n-1,1}+\ldots+x_{n-1}p_{n-1,n-1}\\
w_0p_{0,0}+w_1p_{0,1}+\ldots+w_{n-1}p_{0,n-1} & = & y_0p_{0,0}+y_1p_{0,1}\ldots+y_{n-1}p_{0,n-1}\\
 & \vdots & \\
w_0p_{m-1,0}+w_1p_{m-1,1}+\ldots+w_{n-1}p_{m-1,n-1} & = & y_0p_{m-1,0}+y_1p_{v,1}\ldots+y_{n-1}p_{m-1,n-1}
\end{array}$$

donde:
$v=v_03^{n-1}+v_13^{n-2}+\ldots+v_{n-1}3^0$
$w=w_03^{n-1}+w_13^{n-2}+\ldots+w_{n-1}3^0$
$x=x_03^{n-1}+x_13^{n-2}+\ldots+x_{n-1}3^0$
$y=y_03^{n-1}+y_13^{n-2}+\ldots+y_{n-1}3^0$.

Consideraremos cuatro predicados *clash*. Cada uno tiene n ecuaciones. Las primeras $n-m$ ecuaciones utilizan las últimas $n-m$ ecuaciones de la matriz M. Las últimas m ecuaciones utilizan las primeras m ecuaciones de la matriz M. Utilizaremos estos para los Lemas 3 y 4 con la siguiente notación.

Notación.
$x_1=clash(((b-1),b),((c-1),d),m)$
$x_2=clash(((b-1),b),((d-1),a),m)$
$y_1=clash(((b-1),b),((c-1),e),m)$
$y_2=clash(((b-1),b),((e-1),a),m)$.

Sistema de x_1: El predicado $clash(((b-1),b),((c-1),d),m)$ es `Verdadero` si y solo si este sistema tiene solución:

$$
\begin{aligned}
0p_{m,0} + 2p_{m,1} + 2p_{m,2} + \ldots + 2p_{m,n-1} &= p_{m,0} + 2p_{m,1} + 2p_{m,2} + \ldots + 2p_{m,n-1} \\
0p_{m+1,0} + 2p_{m+1,1} + 2p_{m+1,2} + \ldots + 2p_{m+1,n-1} &= p_{m+1,0} + 2p_{m+1,1} + 2p_{m+1,2} + \ldots + 2p_{m+1,n-1} \\
&\vdots \\
0p_{n-1,0} + 2p_{n-1,1} + 2p_{n-1,2} + \ldots + 2p_{n-1,n-1} &= p_{n-1,0} + 2p_{n-1,1} + 2p_{n-1,2} + \ldots + 2p_{n-1,n-1} \\
p_{0,0} &= 2p_{0,0} + p_{0,1} \\
&\vdots \\
p_{m-1,0} &= 2p_{m-1,0} + p_{m-1,1}
\end{aligned}
$$

El sistema es equivalente a la validez de:

I. Para todo $i = m, m+1, \ldots, n-1$, debe ocurrir $p_{i,0} = 0$

II. Para todo $j = 0, 1, \ldots, m-1$, debe ocurrir $p_{j,0} + p_{j,1} = 0$

III. Para al menos un $u \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, debe ocurrir $p_{u,0} \neq 0$ ya que la matriz debe ser inversible, por ende no puede tener una columna entera de ceros. Debido a la condición anterior, ocurre $p_{u,0} \neq 0 \wedge p_{u,1} \neq 0$

Sistema de x_2: $clash(((b-1), b), ((d-1), a), m)$ es `Verdadero` si este sistema tiene solución:

$$
\begin{aligned}
0p_{m,0} + 2p_{m,1} + 2p_{m,2} + \ldots + 2p_{m,n-1} &= 2p_{m,0} + 0p_{m,1} + 2p_{m,2} + \ldots + 2p_{m,n-1} \\
0p_{m+1,0} + 2p_{m+1,1} + 2p_{m+1,2} + \ldots + 2p_{m+1,n-1} &= 2p_{m+1,0} + 0p_{m+1,1} + 2p_{m+1,2} + \ldots + 2p_{m+1,n-1} \\
&\vdots \\
0p_{n-1,0} + 2p_{n-1,1} + 2p_{n-1,2} + \ldots + 2p_{n-1,n-1} &= 2p_{n-1,0} + 0p_{n-1,1} + 2p_{n-1,2} + \ldots + 2p_{n-1,n-1} \\
&\vdots \\
p_{0,0} &= 0 \\
&\vdots \\
p_{m-1,0} &= 0
\end{aligned}
$$

El sistema es análogo a que se cumpla:

I. Para todo $i = m, m+1, \ldots, n-1$, debe ocurrir $p_{i,0} = p_{i,1}$

II. Para todo $j = 0, 1, \ldots, m-1$, debe ocurrir $p_{j,0} = 0$

III. Para al menos un $v \in \{m, m+1, \ldots, n-1\}$, debe ocurrir $p_{v,0} \neq 0$ ya que la matriz debe ser inversible, por ende no puede tener una columna entera de ceros. Debido a la primer condición de este sistema, sabemos que ocurre $p_{v,0} \neq 0 \wedge p_{v,1} \neq 0$.

Sistema de y_1: $clash(((b-1),b),((c-1),e),m)$ es `Verdadero` si este sistema tiene solución:

$$\begin{array}{rcl}
0p_{m,0}+2p_{m,1}+2p_{m,2}+\ldots+2p_{m,n-1} & = & p_{m,0}+2p_{m,1}+2p_{m,2}+\ldots+2p_{m,n-1} \\
0p_{m+1,0}+2p_{m+1,1}+2p_{m+1,2}+\ldots+2p_{m+1,n-1} & = & p_{m+1,0}+2p_{m+1,1}+2p_{m+1,2}+\ldots+2p_{m+1,n-1} \\
& \vdots & \\
0p_{n-1,0}+2p_{n-1,1}+2p_{n-1,2}+\ldots+2p_{n-1,n-1} & = & p_{n-1,0}+2p_{n-1,1}+2p_{n-1,2}+\ldots+2p_{n-1,n-1} \\
& \vdots & \\
p_{0,0} & = & 2p_{0,0}+2p_{0,1} \\
& \vdots & \\
p_{m-1,0} & = & 2p_{m-1,0}+2p_{m-1,1}
\end{array}$$

Del sistema se deduce:

I. Para todo $i=m,m+1,\ldots,n-1$, debe ocurrir $p_{i,0}=0$

II. Para todo $j=0,1,\ldots,m-1$, debe ocurrir $p_{j,0}+2p_{j,1}=0$

III. Para al menos un $u\in\{0,1,\ldots,m-1\}$, debe ocurrir $p_{u,0}\neq 0$ ya que la matriz debe ser inversible, por ende no puede tener una columna entera de ceros. Por la condición anterior de este sistema, sabemos que ocurre $p_{u,0}\neq 0 \wedge p_{u,1}\neq 0$

Sistema de y_2: $clash(((b-1),b),((e-1),a),m)$ es `Verdadero` si este sistema tiene solución:

$$\begin{array}{rcl}
0p_{m,0}+2p_{m,1}+2p_{m,2}+\ldots+2p_{m,n-1} & = & 2p_{m,0}+p_{m,1}+2p_{m,2}+\ldots+2p_{m,n-1} \\
0p_{m+1,0}+2p_{m+1,1}+2p_{m+1,2}+\ldots+2p_{m+1,n-1} & = & 2p_{m+1,0}+p_{m+1,1}+2p_{m+1,2}+\ldots+2p_{m+1,n-1} \\
& \vdots & \\
0p_{n-1,0}+2p_{n-1,1}+2p_{n-1,2}+\ldots+2p_{n-1,n-1} & = & 2p_{n-1,0}+p_{n-1,1}+2p_{n-1,2}+\ldots+2p_{n-1,n-1} \\
& \vdots & \\
p_{0,0} & = & 0 \\
& \vdots & \\
p_{m-1,0} & = & 0
\end{array}$$

Que puede reescribirse como:

I. Para todo $i=m,m+1,\ldots,n-1$, debe ocurrir $p_{i,0}+p_{i,1}=0$

II. Para todo $j=0,1,\ldots,m-1$, debe ocurrir $p_{j,0}=0$

III. Para al menos un $v\in\{m,m+1,\ldots,n-1\}$, debe ocurrir $p_{v,0}\neq 0$ ya que la matriz debe ser inversible, por ende no puede tener una columna entera de ceros. Por la primer condición de este sistema, se puede deducir $p_{v,0}\neq 0 \wedge p_{v,1}\neq 0$

El siguiente lema se va utilizar en la prueba del Teorema 2, para demostrar que el collar construido es perfecto para las posiciones congruentes a m para $m \neq 0$. Veremos que los *clash* denotados por x_1 o x_2 implican que *clash* de y_1 e y_2 son falsos.

Lema 3. *Para todo m entre 1 y $n-1$ ocurre:*

$$clash(((b-1),b),((c-1),d),m) \quad \vee \quad clash(((b-1),b),((d-1),a),m)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\neg clash(((b-1),b),((c-1),e),m) \quad \wedge \quad \neg clash(((b-1),b),((e-1),a),m)$$

Demostración. Sea $M = (p_{i,j})_{0\leq i,j,n}$ en $\mathcal{P}(3)$. Sea m un módulo arbitrario entre 1 y $n-1$. Dada la definición de *clash* y tomando que el *clash* ocurre para el módulo m. Mostraremos que se cumplen estas cuatro afirmaciones simultáneamente

$$x_1 \Longleftrightarrow \neg y_1$$

$$x_1 \Longleftrightarrow \neg y_2$$

$$x_2 \Longleftrightarrow \neg y_1$$

$$x_2 \Longleftrightarrow \neg y_2$$

Queremos ver que $x_1 \wedge y_1$ resultan en un sistema sin solución

Para que se cumplan las condiciones de los sistemas x_1 y y_1, es necesario que para todo $j = 0, \ldots, m-1$, se satisfagan las condiciones II. del sistema x_1 y II. del sistema y_1.

De la condición II. del sistema x_1, tenemos que $p_{j,0} + p_{j,1} = 0$. Por otro lado, de la condición II. del sistema y_1, obtenemos que $p_{j,0} + 2p_{j,1} = 0$.

Dado que existe algún $u \in \{0, \ldots, m-1\}$ tal que $p_{u,0} \neq 0$ y $p_{u,1} \neq 0$, se puede notar que estas condiciones no pueden cumplirse simultáneamente.

Queremos ver que $x_1 \wedge y_2$ resultan en un sistema sin solución

Para esto deben cumplirse las condiciones de los sistemas x_1 y y_2. La condición III. del sistema de x_1 es incompatible con la condición II. del sistema de y_2 ya que $p_{u,0}$ no puede ser distinto e igual a cero simultáneamente.

Queremos ver que $x_2 \wedge y_1$ resultan en un sistema sin solución

Para esto deben cumplirse las condiciones de los sistemas x_2 y y_1. La condición III. del sistema de x_2 y la condición I. del sistema de y_1 no pueden suceder simultáneamente ya que $p_{v,0}$ no puede ser distinto e igual a cero simultáneamente.

Queremos ver que $x_2 \wedge y_2$ resultan en un sistema sin solución

Para que esto se cumpla, deben satisfacerse las condiciones de los sistemas x_2 y y_2. Para todo $i = m, \ldots, n-1$, deben cumplirse las condiciones I. del sistema x_2 y I. del sistema y_2.

La condición I. del sistema x_2 requiere que $p_{i,0} = p_{i,1}$, mientras que la condición I. del sistema y_2 establece que $p_{i,0} + p_{i,1} = 0$.

Esto es incompatible, ya que para algún $v \in \{m, \ldots, n-1\}$ se cumple que $p_{v,0} \neq 0 \wedge p_{v,1} \neq 0$.

□

Lema 4. *Veamos que las expresiones clash denotadas por x_1, x_2, y_1 e y_2 implican otros predicados clash, que necesitaremos en la prueba del Teorema 2.*

- $clash(((b-1), b), ((c-1), d), m) \implies$
  $clash((a-1, c), (c-1, c), m) \wedge$
  $clash((c-1, e), (a-1, a), m) \wedge$
  $clash((e-1, a), (e-1, e), m)$
- $clash(((b-1), b), ((d-1), a), m) \implies$
  $clash((a-1, c), (a-1, a), m) \wedge$
  $clash((c-1, e), (e-1, e), m) \wedge$
  $clash((e-1, a), (c-1, c), m)$
- $clash(((b-1), b), ((c-1), e), m) \implies$
  $clash((a-1, c), (c-1, c), m) \wedge$
  $clash((c-1, d), (a-1, a), m) \wedge$
  $clash((d-1, a), (d-1, d), m)$
- $clash(((b-1), b), ((e-1), a), m) \implies$
  $clash((a-1, c), (a-1, a), m) \wedge$
  $clash((c-1, d), (d-1, d), m) \wedge$
  $clash((d-1, a), (c-1, c), m)$

Demostración. Veamos cada uno. Donde tomamos $i \in \{m, \ldots, n-1\}$ y $j \in \{0, \ldots, m-1\}$.

El primero es:

$$clash(((b-1), b), ((c-1), d), m) \implies$$

$$clash((a-1, c), (c-1, c), m) \wedge clash((c-1, e), (a-1, a), m) \wedge clash((e-1, a), (e-1, e), m)$$

Sabemos que el resultado `Verdadero` del predicado $clash(((b-1), b), ((c-1), d), m)$ implica necesariamente la validez de las condiciones establecidas en el sistema de x_1.

A continuación, se procede a analizar individualmente cada uno de los *clash* presentes en la conjunción:

- $clash((a-1, c), (c-1, c), m)$: Para que este *clash* se verifique, basta con que se cumpla la restricción I. del sistema de x_1. Esta condición garantiza que $p_{i,0} = 0$.

- $clash((c-1,e),(a-1,a),m)$: En este caso, son necesarias dos condiciones: $p_{i,0}=0$ y $p_{j,0}+p_{j,1}=0$. La primera se deduce directamente de la restricción I., mientras que la segunda es equivalente a restricción II..

- $clash((e-1,a),(e-1,e),m)$: Finalmente, para que este *clash* sea `Verdadero`, es suficiente que se cumpla la condición $p_{j,0}+p_{j,1}=0$, la cual está garantizada por la restricción II. del sistema de x_1.

Veamos el siguiente:

$$clash(((b-1),b),((d-1),a),m) \implies$$

$$clash((a-1,c),(a-1,a),m) \wedge clash((c-1,e),(e-1,e),m) \wedge clash((e-1,a),(c-1,c),m)$$

Sabemos que $clash(((b-1),b),((d-1),a),m) =$ `Verdadero` implica la validez de las condiciones especificadas en el sistema de x_2.

Detengámonos en cada uno de los *clash* de la conjunción:

- $clash((a-1,c),(a-1,a),m)$: Para que se verifique, basta con que $p_{j,0}=0$, lo cual es una consecuencia directa de la condición II. del sistema de x_2.

- $clash((c-1,e),(e-1,e),m)$: Esta condición se satisface si $p_{i,0}=p_{i,1}$, que es una consecuencia directa de la condición I. del sistema de x_2.

- $clash((e-1,a),(c-1,c),m)$: Para que este *clash* sea `Verdadero`, se requiere que $p_{i,0}=p_{i,1}$ y $p_{j,0}=0$, que mostramos en los puntos anteriores que ocurren por I. y II. respectivamente.

El tercero es:

$$clash(((b-1),b),((c-1),e),m) \implies$$

$$clash((a-1,c),(c-1,c),m) \wedge clash((c-1,d),(a-1,a),m) \wedge clash((d-1,a),(d-1,d),m)$$

Sabemos que si $clash(((b-1),b),((c-1),e),m)$ es `Verdadero`, entonces las condiciones del sistema de y_1 deben cumplirse. Analicemos cada uno de los *clash* de la conjunción:

- $clash((a-1,c),(c-1,c),m)$: Para que sea `Verdadero`, es suficiente que se cumpla $p_{i,0}=0$ para $m\le i<n$, esto está dado por la condición I. del sistema de y_1.

- $clash((c-1,d),(a-1,a),m)$: En este caso se requiere $p_{i,0}=0$ para $m\le i<n$ y $2p_{j,0}+p_{j,1}=0$. La primera ya demostró en el caso anterior. La segunda expresión es congruente con $p_{j,0}+2p_{j,1}$ módulo 3, que es la condición II..

- $clash((d-1,a),(d-1,d),m)$: Finalmente, para que este *clash* sea `Verdadero`, necesitamos que se cumpla $2p_{j,0}+p_{j,1}=0$, que ya se mostró en el caso anterior que se cumple con la condición II..

Y por último:

$$clash(((b-1),b),((e-1),a),m) \implies$$

$$clash((a-1,c),(a-1,a),m) \wedge clash((c-1,d),(d-1,d),m) \wedge clash((d-1,a),(c-1,c),m)$$

Sabemos que si resulta `Verdadero` el $clash(((b-1),b),((e-1),a),m)$, entonces las condiciones especificadas en el sistema de y_2 deben satisfacerse necesariamente.

A continuación, se procede a analizar cada uno de los *clash* presentes en la conjunción:

- $clash((a-1,c),(a-1,a),m)$: Para que este *clash* se verifique, es condición suficiente que se cumpla la restricción II. del sistema de y_2. Esta condición implica directamente que $p_{j,0} = 0$.

- $clash((c-1,d),(d-1,d),m)$: En este caso particular, se debe satisfacer la ecuación $p_{i,0} + p_{i,1} = 0$. Dicha condición se encuentra garantizada por la restricción I..

- $clash((d-1,a),(c-1,c),m)$: Para que este *clash* sea `Verdadero`, es necesario que se cumplan simultáneamente ambas condiciones: $p_{i,0} + p_{i,1} = 0$ y $p_{j,0} = 0$. Sin embargo, dado que estas condiciones ya han sido demostradas como válidas en los puntos anteriores, podemos concluir que este *clash* también se verifica.

□

5. Demostración de Teorema 2

Llamaremos collar resultante al collar obtenido a partir del afín por medio de $\pi \circ \rho_1$ o $\pi \circ \rho_2$. Debemos ver que collar resultante no es afín y es (n, n)-perfecto anidado. A continuación verificamos cada una por separado.

El collar resultante no es afín

Los collares ABC' y ABC'' están definidos por las permutaciones $\pi \circ \rho_1$ y $\pi \circ \rho_2$. Sabemos que la permutación π es lineal, por ende se puede dar con una matriz. Dadas las definiciones de ρ_1 y ρ_2 podemos ver que no son transformaciones lineales, por ende no existen matrices que correspondan a las permutaciones de $\pi \circ \rho_1$ y $\pi \circ \rho_2$. Concluimos que tanto ABC' y ABC'' no son afines.

Otra forma de demostrar que ABC' y ABC'' no son afines es por el absurdo. Supongamos que ABC' es afín y que la matriz M genera el collar ABC. Para ambos collares supongamos $z = \{0\}^n$ La matriz que define ABC' se deduce armando el sistema de ecuaciones que resulta de multiplicar la matriz por los n vectores distintos, donde cada uno de ellos tiene un solo 1 y el resto de sus elementos en 0. Sabemos que estos n vectores se encuentran entre los vectores 0 y $c - 1$, por lo que con el bloque AB es suficiente para obtener que matriz generó a un collar. Entonces, es imposible que la matriz M haya generado al collar ABC y una matriz genere al collar ABC'. Concluimos entonces que ABC' es no afín. Este mismo argumento muestra que ABC'' es no afín.

El collar resultante es (n, n)-perfecto

Supongamos que el collar afín ABC fue generado por una matriz M en $\mathcal{P}(3)$ y el vector $z = \{0\}^n$. Veremos al final de la demostración que tomar $z = \{0\}^n$ no quita generalidad. Veamos entonces que el collar resultante ABC' o ABC'', es (n, n)-perfecto.

Para las cadenas $Bloque_1$ y $Bloque_2$, definimos $intrabloque(Bloque_1)$ al conjunto de todas las palabras de longitud n que ocurren en $Bloque_1$ en cualquier posición. Definimos $interbloque(Bloque_1, Bloque_2)$ al conjunto de las palabras de longitud n que ocurren en la concatenación de $Bloque_1$ y $Bloque_2$, con un sufijo en $Bloque_1$ y un prefijo en $Bloque_2$.

En todo lo que sigue, todas las palabras se considerarán de longitud n. Para afirmar que el collar resultante es perfecto, comencemos mirando las palabras en posiciones congruentes a 0 módulo n. Dado que la longitud de los bloques C_A, C_B y C_C es $n3^{n-2}$, tanto para C' y C'', las palabras en posiciones congruentes a 0 $\pmod{n}$ se mantienen. Como ABC es (n, n)-perfecto, podemos afirmar que para las palabras en posiciones congruentes a 0 $\pmod{n}$, tanto en ABC' como en ABC'' siguen apareciendo todas las palabras una única vez. Estas son en total 3^n palabras.

Las palabras en posiciones no congruentes a 0 $\pmod{n}$ requieren mayor atención. Debemos ver en total $n-1$ posiciones, cada una congruente a $m \pmod{n}$) para $m = 1, \ldots, n-1$. Notemos que $interbloque(Bloque_1, Bloque_2)$ nos da una lista de $n-1$ palabras, una para cada congruencia m módulo n, $m = 1, \ldots, n-1$. Revisemos siguientes palabras:

A las palabras que estaban en bloques sucesivos en el collar afín ABC y dejan de estar en bloques sucesivos en el collar resultante, las llamaremos faltantes.
Son en total $3(n-1)$ palabras faltantes:

- Las palabras en $interbloque(B, C_A)$ e $interbloque(C_C, A)$.
- Para ABC', las palabras de $interbloque(C_A, C_B)$.
- Para ABC'', las palabras de $interbloque(C_B, C_C)$.

A las palabras que no estaban en bloques sucesivos en el collar afín ABC y están en bloques sucesivos en el collar resultante, las llamaremos nuevas. Son en total $3(n-1)$ palabras:

- Las palabras de $interbloque(C_C, C_A)$.
- Para ABC', las palabras en $interbloque(B, C_B)$ e $interbloque(C_A, A)$.
- Para ABC'', las palabras en $interbloque(B, C_C)$ e $interbloque(C_B, A)$.

Tanto las palabras nuevas como las faltantes, vienen acompañadas con una congruencia. Si establecemos que las palabras nuevas y las faltantes son las mismas, quedará demostrado que en el collar resultante cada palabra de estas $3(n-1)$ palabras, aparece una sola vez. Para establecer esto utilizamos la definición de *clash* entre palabras nuevas y faltantes. Si el predicado es `Verdadero`, quiere decir que encontramos que una palabra faltante se encuentra en el collar resultante, como una palabra nueva, ambas en la misma congruencia $m \pmod{n}$.

Veamos primero que uno de los collares ABC' o ABC'' necesariamente no es perfecto. Para esto vamos a mostrar que hay alguna palabra que aparece dos veces en la misma congruencia. Utilizamos la definición de *clash* para mostrar que una palabra nueva aparece también en $interbloque(A, B)$.

Para la definición de *clash* son necesarios los vectores v por los que se multiplica la matriz M en vez de los bloques. Describiremos el uso de *clash* a partir de *interbloques* en vez de pares de vectores de acuerdo a la siguiente tabla:

Par de vectores	**Interbloque**
$((b-1), b)$	AB
$((c-1), d)$	BC_B
$((d-1), a)$	C_BA
$((c-1), e)$	BC_C
$((e-1), a)$	C_CA

El Lema 3 establece que el predicado *clash* es `Verdadero` para $interbloque(A, B)$ con al menos uno de los *interbloques* BC_B, C_BA, BC_C, C_CA. Además establece que si es `Verdadero` alguno de los predicados $clash(AB, BC_B)$ o $clash(AB, C_BA)$, ambos predicados $clash(AB, BC_C)$ y $clash(AB, C_CA)$ son `Falso`. Y viceversa.

Sabemos que si es `Verdadero` $clash(AB, BC_B) \vee clash(AB, C_BA)$, el collar ABC' no es perfecto, pero el ABC'' puede serlo. Del mismo modo, si es `Verdadero`

$clash(AB, BC_C) \vee clash(AB, C_CA)$,
entonces el collar ABC'' no es perfecto, pero el ABC' puede serlo.

Basta entonces con mostrar que, para el collar ABC' o ABC'' que aún puede ser perfecto, las $3(n-1)$ palabras que estaban en bloques sucesivos del collar afín y dejan de estarlo en el resultante (las llamamos palabras faltantes) coinciden con las $3(n-1)$ palabras que ahora están en bloques sucesivos del collar resultante y en el collar afín no lo están (las llamamos palabras nuevas). Para eso utilizaremos las correspondencias de la tabla anterior y las siguientes:

Par de vectores	**Interbloque**
$((c-1), c)$	BC_A
$((c-1), d)$	BC_B
$((c-1), e)$	BC_C
$((d-1), a)$	C_AA
$((d-1), d)$	C_AC_B
$((e-1), a)$	C_BA
$((e-1), e)$	C_BC_C
$((a-1), a)$	C_CA
$((a-1), c)$	C_CC_A

De acuerdo con el Lema 4, que sea `Verdadero` el *clash* entre el bloque AB y cada uno de los *interbloque* de primera tabla implica, en cada caso, una correspondencia entre las palabras nuevas y las faltantes.

Veamos ahora las palabras restantes, estas son las palabras en

- $intrabloque(AB)$
- Para ABC', $intrabloque(C_BC_C)$ e $intrabloque(C_A)$.
- Para ABC'', $intrabloque(C_AC_B)$ e $intrabloque(C_C)$.

Las palabras en $intrabloque(AB)$ aparecen en la mismas posiciones en los tres collares en cuestión, por lo que sabemos que al menos aparecen una vez. Las palabras en $intrabloque(C_BC_C)$ e $intrabloque(C_A)$ o $intrabloque(C_AC_B)$ e $intrabloque(C_C)$ (según cada caso) aparecen en el collar correspondiente ABC' o ABC'' con la misma congruencia que en el afín, por ende aparecen al menos una vez. Como las $3(n-1)$ palabras que nos faltaban del collar afín se corresponden a las $3(n-1)$ palabras nuevas del collar resultante, sabemos que todas las palabras van a aparecer exactamente una vez.

Para ver que para los collares afines generados por una matriz $M \in \mathcal{P}(3)$ y un vector $z \neq \{0\}^n$ se obtiene el mismo resultado, es necesario revisar la definición de *clash*. Si se agregase el parámetro z, podemos ver que el sistema de ecuaciones resultante para $clash((v, w), (x, y), m, z)$ es equivalente al sistema de considerar $z = \{0\}^n$. Esto ocurre ya dentro de las primeras $n - m$ ecuaciones, cada ecuación representa el i-ésimo valor del vector resultante donde queremos $(M[v])_i = (M[x])_i$ donde $m \leq i < n$. Si ahora consideramos z, la ecuación sería $(M[v] + z)_i = (M[x] + z)_i$ que es equivalente a $(M[v])_i + z_i = (M[x])_i + z_i$. Esto es $(M[v])_i = (M[x])_i$, por ende el vector z se puede obviar sin pérdida de generalidad. El razonamiento para las m ecuaciones restantes es equivalente, tomando $0 \leq j < m$ y $M[w]$, $M[y]$ en vez de $M[x]$ y $M[x]$.

El collar resultante es anidado

Los collares definidos a partir de las permutaciones $\pi \circ \rho_1$ y $\pi \circ \rho_2$ mantienen los mismos collares $(n-1,\ n)$-perfectos anidados que el collar definido por π, ya que la definición de collar es circular. Por ende el collar ABC' o ABC'' que sea perfecto, es también anidado.

$\square$

5.1. Ejemplos de collares no afines en 3 símbolos

Para terminar damos a continuación un par de ejemplos de collares perfectos anidados no afines en tres símbolos.

El siguiente es un collar (2,2) **no** afín generado por el collar afín de $M_2^{0,0}$ y $z=(0,0)$ visualizado en 3.3:

00 11 22 10 21 02 01 12 20

Collar (4,4) **no** afín generado por el collar afín de $M_4^{0,0,0,0}$ y $z=(0,0,0,0)$ visualizado en 3.3:

$$A\left\{\begin{array}{l} 0000\ 1111\ 2222\ 1010\ 2121\ 0202\ 2020\ 0101\ 1212 \,\}\, A_A \\ 1100\ 2211\ 0022\ 2110\ 0221\ 1002\ 0120\ 1201\ 2012 \,\}\, A_B \\ 2200\ 0011\ 1122\ 0210\ 1021\ 2102\ 1220\ 2001\ 0112 \,\}\, A_C \end{array}\right.$$

$$B\left\{\begin{array}{l} 1000\ 2111\ 0222\ 2010\ 0121\ 1202\ 0020\ 1101\ 2212 \,\}\, B_A \\ 2100\ 0211\ 1022\ 0110\ 1221\ 2002\ 1120\ 2201\ 0012 \,\}\, B_B \\ 0200\ 1011\ 2122\ 1210\ 2021\ 0102\ 2220\ 0001\ 1112 \,\}\, B_C \end{array}\right.$$

$$C''\left\{\begin{array}{l} 1200\ 2011\ 0122\ 2210\ 0021\ 1102\ 0220\ 1001\ 2112 \,\}\, C_C \\ 2000\ 0111\ 1222\ 0010\ 1121\ 2202\ 1020\ 2101\ 0212 \,\}\, C_A \\ 0100\ 1211\ 2022\ 1110\ 2221\ 0002\ 2120\ 0201\ 1012 \,\}\, C_B \end{array}\right.$$

Referencias

[1] Nicolás Alvarez, Verónica Becher, Pablo A. Ferrari, and Sergio A. Yuhjtman. Perfect necklaces. *Advances in Applied Mathematics*, 80:48–61, 2016.

[2] Verónica Becher and Olivier Carton. Normal numbers and computer science. In V. Berthé and editors M. Rigo, editors, *Sequences, Groups, and Number Theory*, Trends in Mathematics Series, pages 233–269. Birkhäuser/Springer, 2018.

[3] Verónica Becher and Olivier Carton. Normal numbers and perfect necklaces. *Journal of Complexity*, 54:101403, 2019.

[4] Nicolaas G. de Bruijn. A combinatorial problem. *Koninklijke Nederlandse Akademie v. Wetenschappen*, 49:758–764, 1946. Indagationes Mathematicae 8 (1946) 461-467.

[5] Roswitha Hofer and Gerhard Larcher. Discrepancy bounds for normal numbers generated by necklaces in arbitrary base. *Journal of Complexity*, 78:101767, 2023.

[6] Mordechay B. Levin. On the discrepancy estimate of normal numbers. *Acta Arithmetica*, 88(2):99–111, 1999.

[7] Martín Mereb. Determinants of matrices related to the Pascal triangle. *Periodica Mathematica Hungarica*, 89:168–174, 2024.