

Pintar mapas, organizar fiestas... en el fondo, es sólo teoría de grafos

Flavia Bonomo

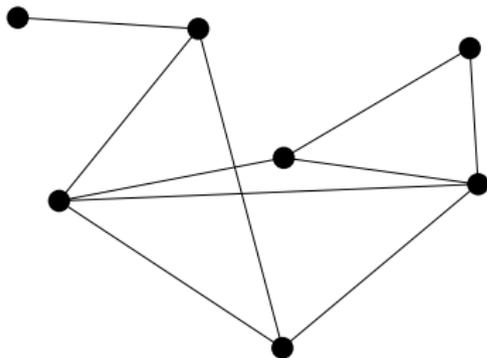
Grupo de Teoría de Grafos
Departamento de Computación
FCEyN - UBA

Charla de Borrachos
Noviembre 2004



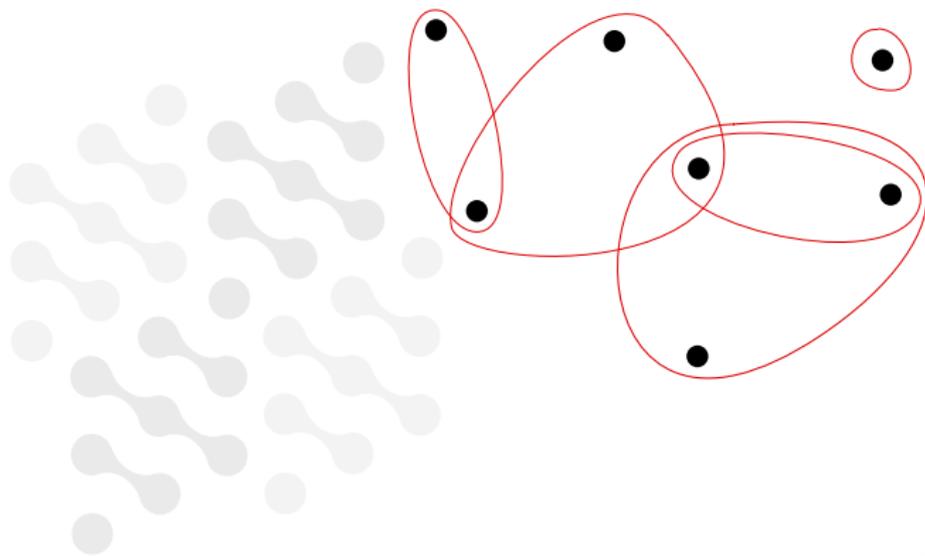
¿Qué es un grafo?

- ▶ Un grafo está formado por un conjunto de vértices y un conjunto de aristas que unen pares de vértices.

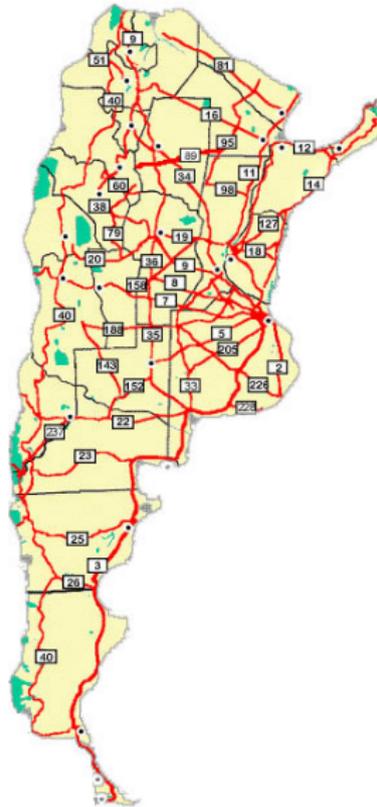


- ▶ Es un objeto matemático abstracto pero se usa para modelar problemas reales.

O también puede necesitar un **hipergrafo**, donde las aristas no involucran 2 vértices sino que son subconjuntos no vacíos de vértices (de cualquier cardinalidad).

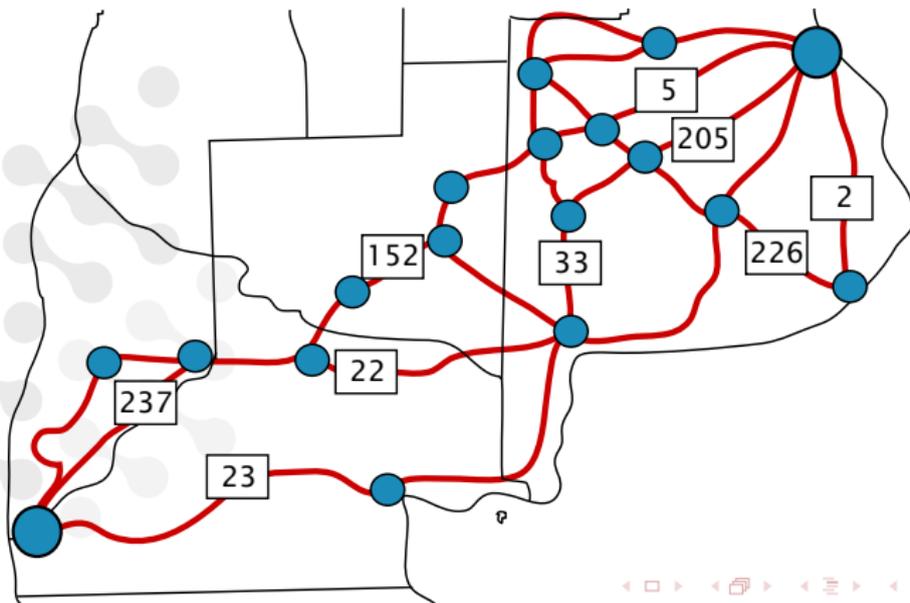


Rutas argentinas

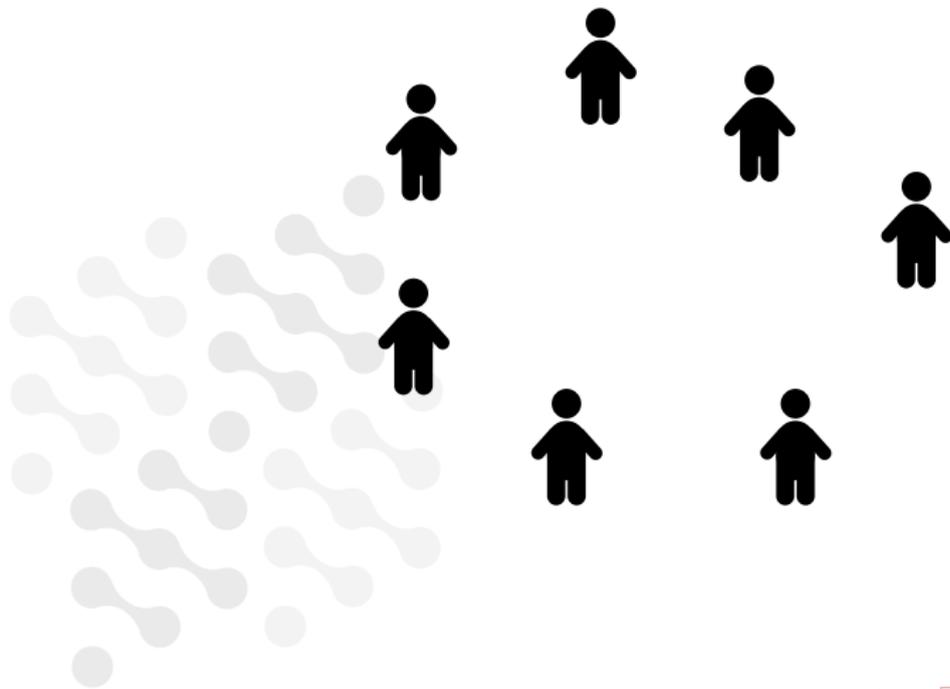


Rutas argentinas

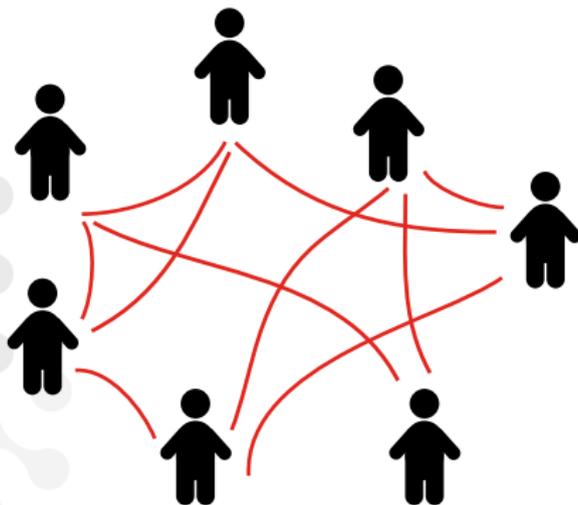
Si nos quedamos con el “subgrafo inducido” por Buenos Aires, Río Negro, La Pampa y Neuquén, podemos buscar ahí el camino mínimo entre Buenos Aires y Bariloche.



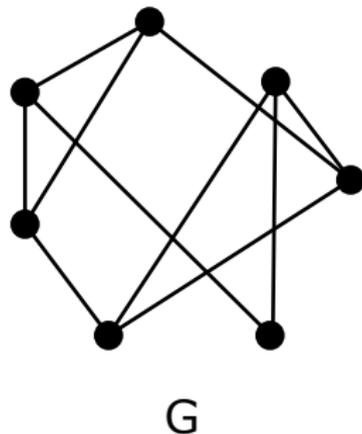
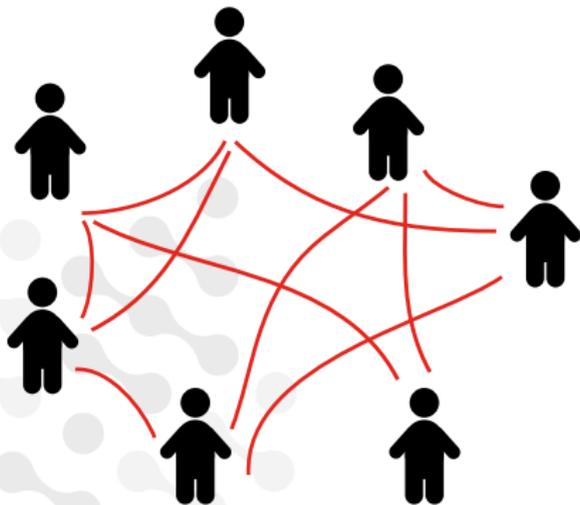
Eligiendo novio... ♡



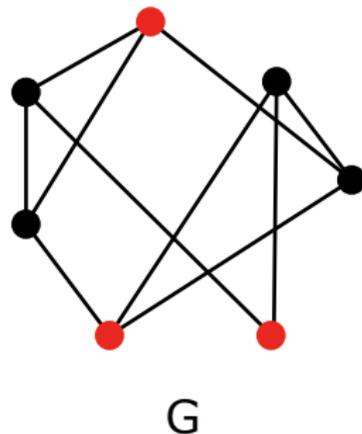
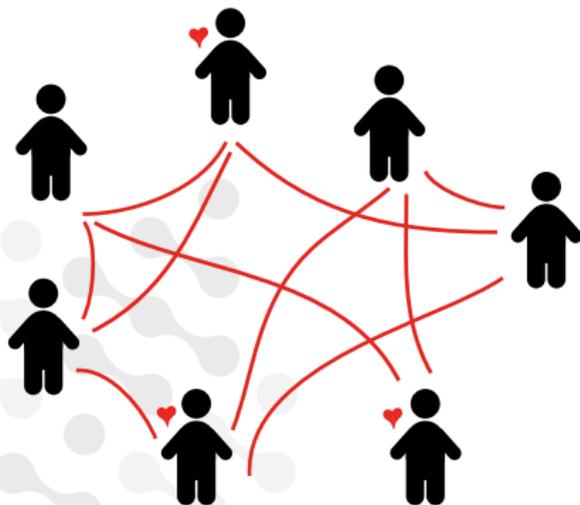
Eligiendo novio... ♡



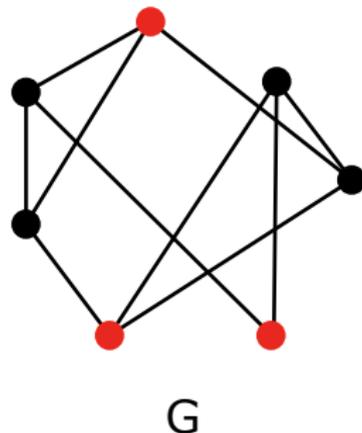
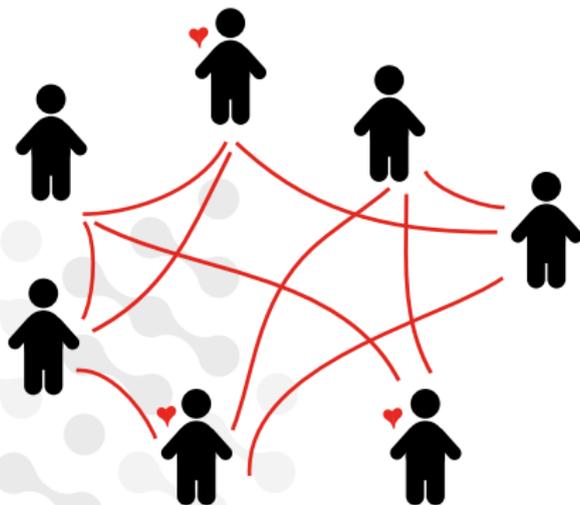
Eligiendo novio... ♡



Eligiendo novio... ♡



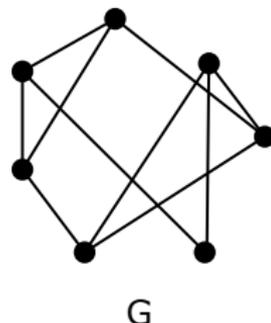
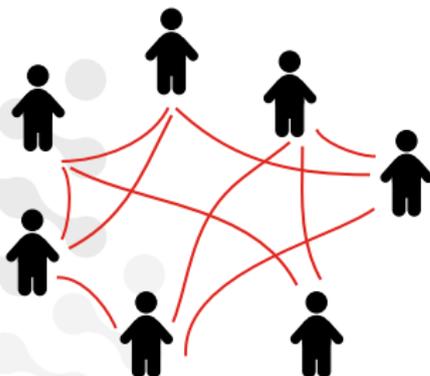
Eligiendo novio... ♡



Lo que buscamos es un **conjunto independiente** máximo en el grafo G . El cardinal de ese conjunto se nota $\alpha(G)$.

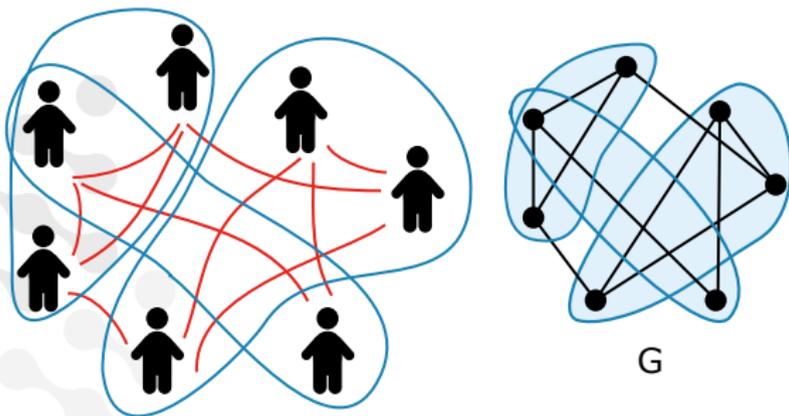
Cómo organizar una fiesta

Queremos organizar varias reuniones invitando a cada una gente que se conozca entre sí. ¿Cuál es la mínima cantidad de reuniones?



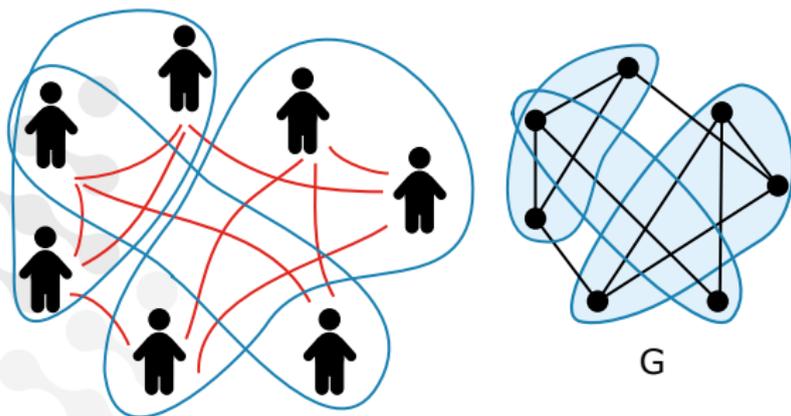
Cómo organizar una fiesta

Queremos organizar varias reuniones invitando a cada una gente que se conozca entre si. ¿Cuál es la mínima cantidad de reuniones?



Cómo organizar una fiesta

Queremos organizar varias reuniones invitando a cada una gente que se conozca entre sí. ¿Cuál es la mínima cantidad de reuniones?



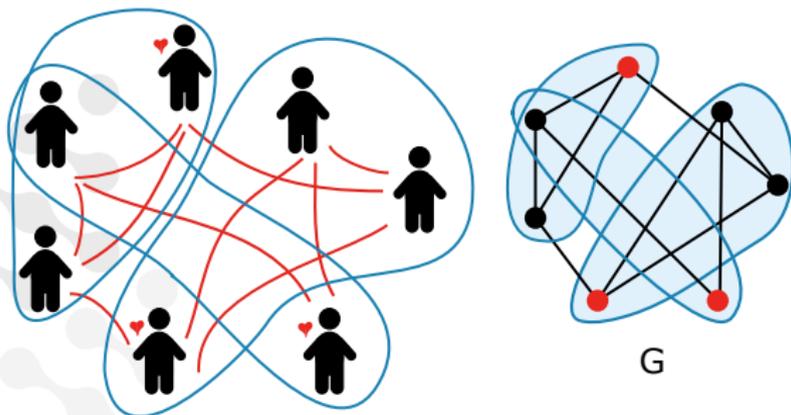
Lo que buscamos es un **cubrimiento de vértices por cliques** mínimo en el grafo G . El cardinal de ese conjunto se nota $k(G)$.

¿Y quién se queda a lavar los platos?



¿Y quién se queda a lavar los platos?

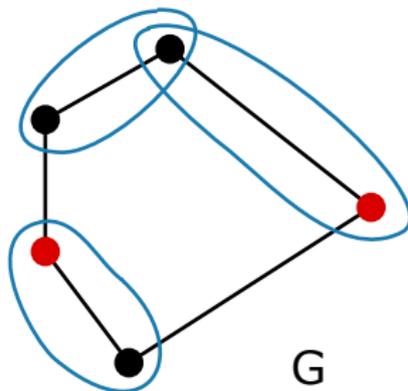
Sería **perfecto** que en cada reunión haya uno de los candidatos a novio, que quiera hacer méritos y lave los platos... :)



En otras palabras, que $\alpha(G) = k(G)$. Un grafo es **perfecto** si $\alpha(H) = k(H)$ para todo H subgrafo inducido de G .

Pero no todo es perfecto en la vida...

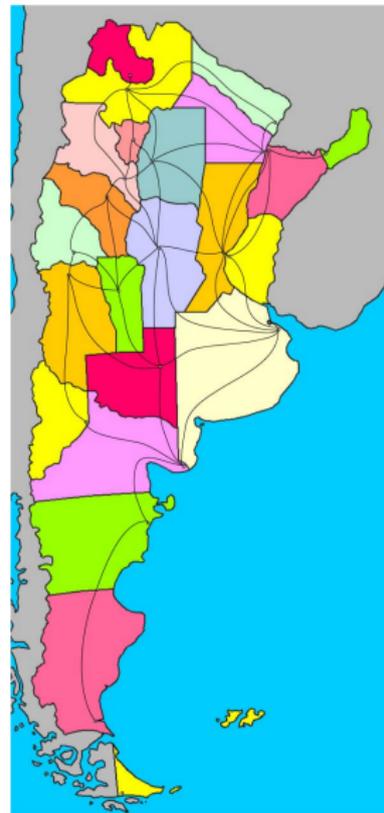
En este grafo, $\alpha(G) = 2$ y $k(G) = 3$.



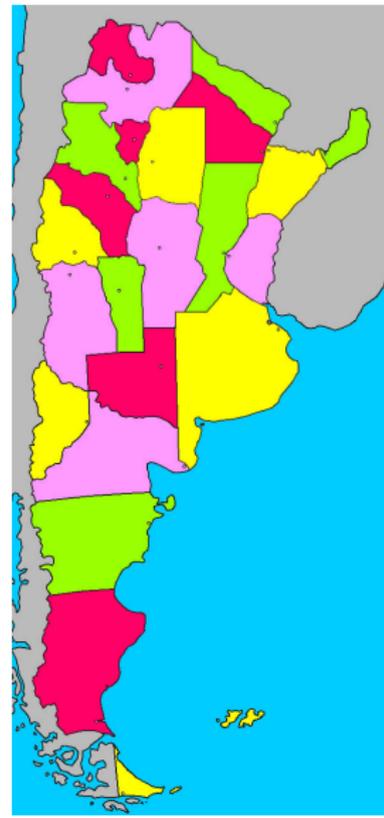
Ahora, la verdadera historia...



Pintar mapas



Pintar mapas



El Teorema de los 4 colores

- ▶ 1852: carta de De Morgan a Hamilton (problema original: F & F Guthrie).



El Teorema de los 4 colores

- ▶ 1852: carta de De Morgan a Hamilton (problema original: F & F Guthrie).
- ▶ Respuesta de Hamilton: *"I am not likely to attempt your 'quaternion of colours' very soon"*.



El Teorema de los 4 colores

- ▶ 1852: carta de De Morgan a Hamilton (problema original: F & F Guthrie).
- ▶ Respuesta de Hamilton: *"I am not likely to attempt your 'quaternion of colours' very soon"*.
- ▶ 1879: Kempe publicó un artículo "probando" la conjetura de los 4 colores.



El Teorema de los 4 colores

- ▶ **1852**: carta de De Morgan a Hamilton (problema original: F & F Guthrie).
- ▶ Respuesta de Hamilton: *"I am not likely to attempt your 'quaternion of colours' very soon"*.
- ▶ **1879**: Kempe publicó un artículo "probando" la conjetura de los 4 colores.
- ▶ **1890**: Heawood detecta una falacia en la prueba de Kempe y prueba que vale para 5 colores.

El Teorema de los 4 colores

- ▶ **1852**: carta de De Morgan a Hamilton (problema original: F & F Guthrie).
- ▶ Respuesta de Hamilton: *"I am not likely to attempt your 'quaternion of colours' very soon"*.
- ▶ **1879**: Kempe publicó un artículo "probando" la conjetura de los 4 colores.
- ▶ **1890**: Heawood detecta una falacia en la prueba de Kempe y prueba que vale para 5 colores.
- ▶ **1976**: demostración computacional de Appel, Haken y Koch.

El Teorema de los 4 colores

- ▶ **1852**: carta de De Morgan a Hamilton (problema original: F & F Guthrie).
- ▶ Respuesta de Hamilton: *"I am not likely to attempt your 'quaternion of colours' very soon"*.
- ▶ **1879**: Kempe publicó un artículo "probando" la conjetura de los 4 colores.
- ▶ **1890**: Heawood detecta una falacia en la prueba de Kempe y prueba que vale para 5 colores.
- ▶ **1976**: demostración computacional de Appel, Haken y Koch.
- ▶ **1997**: nueva prueba computacional pero mucho más sencilla (Robertson, Sanders, Seymour y Thomas).

El Teorema de los 4 colores

- ▶ **1852**: carta de De Morgan a Hamilton (problema original: F & F Guthrie).
- ▶ Respuesta de Hamilton: *"I am not likely to attempt your 'quaternion of colours' very soon"*.
- ▶ **1879**: Kempe publicó un artículo "probando" la conjetura de los 4 colores.
- ▶ **1890**: Heawood detecta una falacia en la prueba de Kempe y prueba que vale para 5 colores.
- ▶ **1976**: demostración computacional de Appel, Haken y Koch.
- ▶ **1997**: nueva prueba computacional pero mucho más sencilla (Robertson, Sanders, Seymour y Thomas).
- ▶ Lo que es fácil de demostrar es que en un grafo planar no hay cliques de 5 vértices, pero... no todos los grafos planares son perfectos.

Grafos Perfectos

- ▶ **1960**: Berge definió los grafos **perfectos** como aquellos tales que el tamaño de la clique máxima es igual al número cromático para el grafo y todos sus subgrafos inducidos.



Grafos Perfectos

- ▶ **1960**: Berge definió los grafos **perfectos** como aquellos tales que el tamaño de la clique máxima es igual al número cromático para el grafo y todos sus subgrafos inducidos.
 - ▶ **Conjetura Fuerte**: los únicos grafos minimalmente imperfectos son los ciclos impares y sus complementos.



Grafos Perfectos

- ▶ **1960**: Berge definió los grafos **perfectos** como aquellos tales que el tamaño de la clique máxima es igual al número cromático para el grafo y todos sus subgrafos inducidos.
 - ▶ Conjetura Fuerte: los únicos grafos minimalmente imperfectos son los ciclos impares y sus complementos.
 - ▶ Conjetura Débil: un grafo es perfecto si y sólo si su complemento lo es.



Grafos Perfectos

- ▶ **1960**: Berge definió los grafos **perfectos** como aquellos tales que el tamaño de la clique máxima es igual al número cromático para el grafo y todos sus subgrafos inducidos.
 - ▶ Conjetura Fuerte: los únicos grafos minimalmente imperfectos son los ciclos impares y sus complementos.
 - ▶ Conjetura Débil: un grafo es perfecto si y sólo si su complemento lo es.
- ▶ La segunda propiedad es la que hace que las dos definiciones que dimos sean equivalentes.

Grafos Perfectos

- ▶ **1960**: Berge definió los grafos **perfectos** como aquellos tales que el tamaño de la clique máxima es igual al número cromático para el grafo y todos sus subgrafos inducidos.
 - ▶ Conjetura Fuerte: los únicos grafos minimalmente imperfectos son los ciclos impares y sus complementos.
 - ▶ Conjetura Débil: un grafo es perfecto si y sólo si su complemento lo es.
- ▶ La segunda propiedad es la que hace que las dos definiciones que dimos sean equivalentes.
 - ▶ Clique máxima en el grafo = conjunto independiente máximo en el complemento.

Grafos Perfectos

- ▶ **1960**: Berge definió los grafos **perfectos** como aquellos tales que el tamaño de la clique máxima es igual al número cromático para el grafo y todos sus subgrafos inducidos.
 - ▶ Conjetura Fuerte: los únicos grafos minimalmente imperfectos son los ciclos impares y sus complementos.
 - ▶ Conjetura Débil: un grafo es perfecto si y sólo si su complemento lo es.
- ▶ La segunda propiedad es la que hace que las dos definiciones que dimos sean equivalentes.
 - ▶ Clique máxima en el grafo = conjunto independiente máximo en el complemento.
 - ▶ Coloreo mínimo en el grafo = cubrimiento mínimo por cliques en el complemento.

Un poco de telenovela...

- ▶ **1972:** Lovász (y después Fulkerson) prueba la conjetura débil (Teorema de los Grafos Perfectos).



Un poco de telenovela...

- ▶ **1972**: Lovász (y después Fulkerson) prueba la conjetura débil (Teorema de los Grafos Perfectos).
- ▶ **1972** →: Mucha gente trabajó en la conjetura y en grafos perfectos (variantes, subclases, etc.).



Un poco de telenovela...

- ▶ **1972**: Lovász (y después Fulkerson) prueba la conjetura débil (Teorema de los Grafos Perfectos).
- ▶ **1972** →: Mucha gente trabajó en la conjetura y en grafos perfectos (variantes, subclases, etc.).
- ▶ Los cuatro problemas NP-completos involucrados en la definición son polinomiales en grafos perfectos (Chvátal, Grötschel, Lovász y Schrijver).

Un poco de telenovela...

- ▶ **1972:** Lovász (y después Fulkerson) prueba la conjetura débil (Teorema de los Grafos Perfectos).
- ▶ **1972** →: Mucha gente trabajó en la conjetura y en grafos perfectos (variantes, subclases, etc.).
- ▶ Los cuatro problemas NP-completos involucrados en la definición son polinomiales en grafos perfectos (Chvátal, Grötschel, Lovász y Schrijver).
- ▶ **2002:** Chudnovsky, Robertson, Seymour y Thomas prueban la conjetura fuerte (El Teorema Fuerte de los Grafos Perfectos). En junio murió Berge.

Un poco de telenovela...

- ▶ **1972:** Lovász (y después Fulkerson) prueba la conjetura débil (Teorema de los Grafos Perfectos).
- ▶ **1972** →: Mucha gente trabajó en la conjetura y en grafos perfectos (variantes, subclases, etc.).
- ▶ Los cuatro problemas NP-completos involucrados en la definición son polinomiales en grafos perfectos (Chvátal, Grötschel, Lovász y Schrijver).
- ▶ **2002:** Chudnovsky, Robertson, Seymour y Thomas prueban la conjetura fuerte (El Teorema Fuerte de los Grafos Perfectos). En junio murió Berge.
- ▶ **2003:** Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour y Vušković demostraron que el reconocimiento es polinomial.

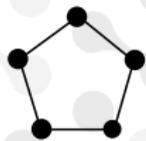
Grafos clique-perfectos

- ▶ **2000**: Guruswami y Pandu Rangan definen los grafos **clique-perfectos** como aquellos tales que el cardinal de un cubrimiento de cliques por vértices mínimo es igual al cardinal de un conjunto de cliques independientes máximo. La definición es similar a la primera que vimos de grafos perfectos.

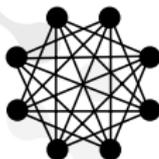


Grafos que NO SON clique-perfectos

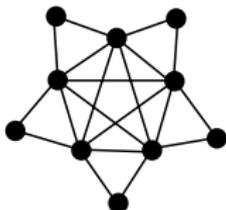
Lo que estamos tratando de hacer es caracterizarlos por subgrafos prohibidos, o sea, decir “un grafo es c-p si y sólo si no contiene como subgrafo inducido a tal, tal y tal”. Algunos grafos que no son: ciclos impares, anticiclos no multiples de tres, soles impares, los soles generalizados...



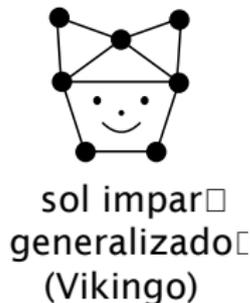
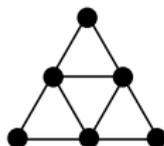
ciclo □
impar



anticiclo
no múltiplo □
de 3



soles impares



sol impar □
generalizado □
(Vikingo)

Grafos que SI SON clique-perfectos

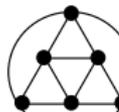
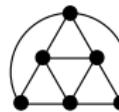
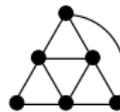
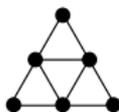
- ▶ Grafos balanceados. Los problemas asociados a la definición son polinomiales en esa clase.
- ▶ Clases de grafos para las que tenemos probada la caracterización:
 - ▶ Grafos cordales.
 - ▶ Grafos sin diamantes.
 - ▶ Grafos de línea.
 - ▶ Grafos HCH claw-free.



diamante



garra



grafos de Hajós