

Caracterização parcial dos grafos clique-perfeitos

Flavia Bonomo

Departamento de Computación
FCEyN
Universidad de Buenos Aires

Seminário de Grafos e Algoritmos
COPPE, UFRJ, Março 2005

Esquema da palestra

Grafos perfeitos

Grafos clique-perfeitos

- Relação com os grafos perfeitos

- Famílias de grafos que são clique-perfeitos

- Famílias de grafos que não são clique-perfeitos

Caracterizações e algoritmos de reconhecimento

- Grafos cordais

- Grafos de linha

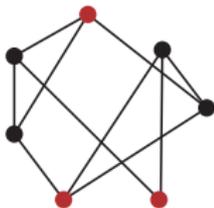
- Grafos clique-Helly hereditários sem $K_{1,3}$

- Grafos sem diamantes

- Grafos arco-circulares Helly

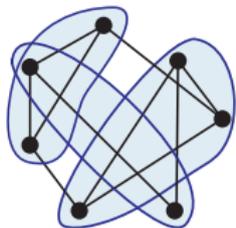
Grafos perfeitos

- ▶ Um **conjunto independente** em um grafo G é um conjunto de vértices mutuamente não adjacentes. Notamos $\alpha(G)$ ao tamanho de um conjunto independente máximo de G .
- ▶ Um recobrimento dos vértices por cliques em um grafo G é um subconjunto das cliques de G tal que todo vértice de G pertence a pelo menos a uma delas. Notamos $k(G)$ ao tamanho de um recobrimento de vértices por cliques mínimo em G .
- ▶ Um grafo G é perfeito quando $\alpha(H) = k(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .



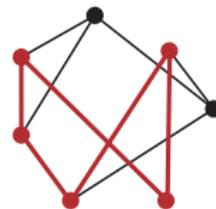
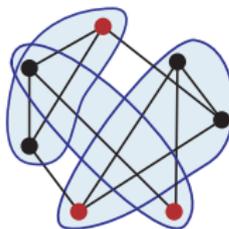
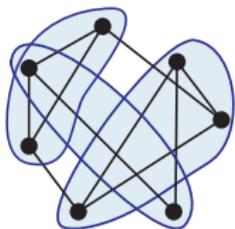
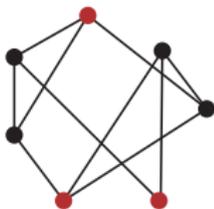
Grafos perfeitos

- ▶ Um **conjunto independente** em um grafo G é um conjunto de vértices mutuamente não adjacentes. Notamos $\alpha(G)$ ao tamanho de um conjunto independente máximo de G .
- ▶ Um **recobrimento dos vértices por cliques** em um grafo G é um subconjunto das cliques de G tal que todo vértice de G pertence a pelo menos a uma delas. Notamos $k(G)$ ao tamanho de um recobrimento de vértices por cliques mínimo em G .
- ▶ Um grafo G é perfeito quando $\alpha(H) = k(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .



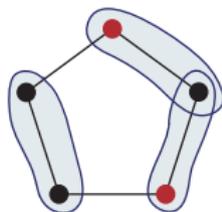
Grafos perfeitos

- ▶ Um **conjunto independente** em um grafo G é um conjunto de vértices mutuamente não adjacentes. Notamos $\alpha(G)$ ao tamanho de um conjunto independente máximo de G .
- ▶ Um **recobrimento dos vértices por cliques** em um grafo G é um subconjunto das cliques de G tal que todo vértice de G pertence a pelo menos a uma delas. Notamos $k(G)$ ao tamanho de um recobrimento de vértices por cliques mínimo em G .
- ▶ Um grafo G é **perfeito** quando $\alpha(H) = k(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .

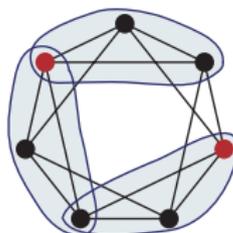


Exemplos

- ▶ Um buraco é um ciclo induzido de comprimento maior que quatro.
- ▶ Os buracos ímpares C_{2k+1} , $k \geq 2$, não são perfeitos:
 $\alpha(C_{2k+1}) = k$ e $k(C_{2k+1}) = k + 1$.
- ▶ Os complementos de buracos ímpares $\overline{C_{2k+1}}$, $k \geq 2$, não são perfeitos: $\alpha(\overline{C_{2k+1}}) = 2$ e $k(\overline{C_{2k+1}}) = 3$.



C_5



$\overline{C_7}$

Grafos perfeitos

Os grafos perfeitos foram introduzidos por Berge no ano 1960. Ele conjecturou que os únicos grafos imperfeitos minimais são os buracos ímpares e seus complementos. Finalmente, essa conjectura foi provada no ano 2002 por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas.

Teorema Forte dos Grafos Perfeitos

Um grafo é perfeito se e somente se não contém um buraco ímpar nem o seu complemento como subgrafo induzido.

Os grafos perfeitos tem um algoritmo de reconhecimento polinomial (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour e Vušković, 2003).

Grafos perfeitos

Os grafos perfeitos foram introduzidos por Berge no ano 1960. Ele conjecturou que os únicos grafos imperfeitos minimais são os buracos ímpares e seus complementos. Finalmente, essa conjectura foi provada no ano 2002 por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas.

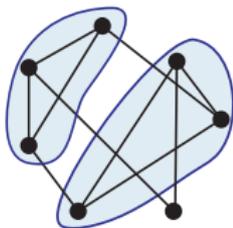
Teorema Forte dos Grafos Perfeitos

Um grafo é perfeito se e somente se não contém um buraco ímpar nem o seu complemento como subgrafo induzido.

Os grafos perfeitos tem um algoritmo de reconhecimento polinomial (Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour e Vušković, 2003).

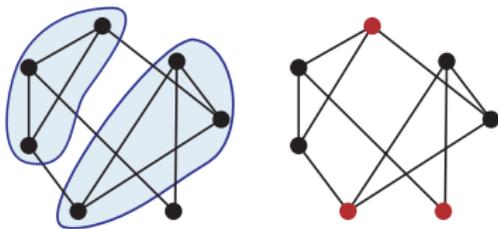
Grafos clique-perfeitos

- ▶ Um conjunto de cliques independentes é um conjunto de cliques mutuamente disjuntas. Notamos $\alpha_C(G)$ ao tamanho de um conjunto de cliques independentes de G máximo.
- ▶ Um transversal das cliques é um conjunto de vértices tais que toda clique contém pelo menos um deles. Notamos $\tau_C(G)$ ao tamanho de um transversal das cliques de G mínimo.
- ▶ Um grafo G é clique-perfeito quando $\alpha_C(H) = \tau_C(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .



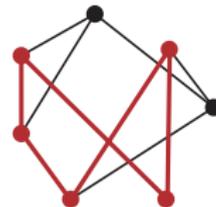
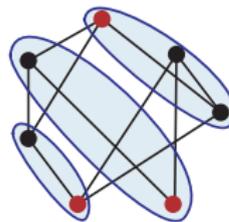
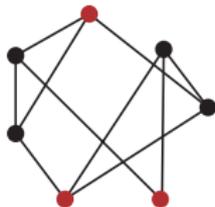
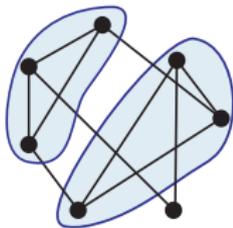
Grafos clique-perfeitos

- ▶ Um **conjunto de cliques independentes** é um conjunto de cliques mutuamente disjuntas. Notamos $\alpha_C(G)$ ao tamanho de um conjunto de cliques independentes de G máximo.
- ▶ Um **transversal das cliques** é um conjunto de vértices tais que toda clique contém pelo menos um deles. Notamos $\tau_C(G)$ ao tamanho de um transversal das cliques de G mínimo.
- ▶ Um grafo G é clique-perfeito quando $\alpha_C(H) = \tau_C(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .



Grafos clique-perfeitos

- ▶ Um **conjunto de cliques independentes** é um conjunto de cliques mutuamente disjuntas. Notamos $\alpha_C(G)$ ao tamanho de um conjunto de cliques independentes de G máximo.
- ▶ Um **transversal das cliques** é um conjunto de vértices tais que toda clique contém pelo menos um deles. Notamos $\tau_C(G)$ ao tamanho de um transversal das cliques de G mínimo.
- ▶ Um grafo G é **clique-perfeito** quando $\alpha_C(H) = \tau_C(H)$ para todo subgrafo induzido H de G .



Grafos clique-perfeitos

- ▶ A notação “clique-perfeito” foi introduzida por Guruswami e Pandu Rangan no ano 2000, mais a igualdade dos parâmetros α_C e τ_C já fora estudada previamente por Berge no contexto de hipergrafos balanceados.
- ▶ Não se conhece ainda uma lista completa dos grafos clique-imperfeitos minimais, nem se conhece ainda a complexidade do problema de reconhecimento de grafos clique-perfeitos.
- ▶ Até agora, nós conseguimos caracterizar os grafos clique-perfeitos por subgrafos proibidos dentro de algumas classes de grafos. Algumas dessas caracterizações conduzem a algoritmos de reconhecimento polinomial de clique-perfeição para grafos nessas classes. Os resultados principais desta apresentação estarão publicados nos anais do GRACO, num trabalho conjunto com M. Chudnovsky e G. Durán.

Grafos clique-perfeitos

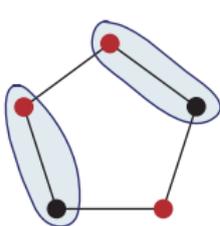
- ▶ A notação “clique-perfeito” foi introduzida por Guruswami e Pandu Rangan no ano 2000, mais a igualdade dos parâmetros α_C e τ_C já fora estudada previamente por Berge no contexto de hipergrafos balanceados.
- ▶ Não se conhece ainda uma lista completa dos grafos clique-imperfeitos minimais, nem se conhece ainda a complexidade do problema de reconhecimento de grafos clique-perfeitos.
- ▶ Até agora, nós conseguimos caracterizar os grafos clique-perfeitos por subgrafos proibidos dentro de algumas classes de grafos. Algumas dessas caracterizações conduzem a algoritmos de reconhecimento polinomial de clique-perfeição para grafos nessas classes. Os resultados principais desta apresentação estarão publicados nos anais do GRACO, num trabalho conjunto com M. Chudnovsky e G. Durán.

Grafos clique-perfeitos

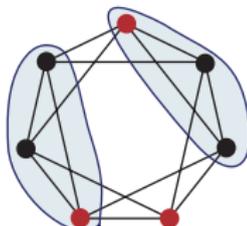
- ▶ A notação “clique-perfeito” foi introduzida por Guruswami e Pandu Rangan no ano 2000, mais a igualdade dos parâmetros α_C e τ_C já fora estudada previamente por Berge no contexto de hipergrafos balanceados.
- ▶ Não se conhece ainda uma lista completa dos grafos clique-imperfeitos minimais, nem se conhece ainda a complexidade do problema de reconhecimento de grafos clique-perfeitos.
- ▶ Até agora, nós conseguimos caracterizar os grafos clique-perfeitos por subgrafos proibidos dentro de algumas classes de grafos. Algumas dessas caracterizações conduzem a algoritmos de reconhecimento polinomial de clique-perfeição para grafos nessas classes. Os resultados principais desta apresentação estarão publicados nos anais do GRACO, num trabalho conjunto com M. Chudnovsky e G. Durán.

Primeira pergunta: existe alguma relação entre grafos perfeitos e grafos clique-perfeitos?

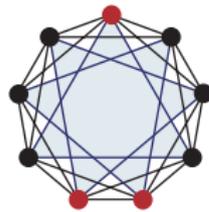
- ▶ Os buracos ímpares C_{2k+1} , $k \geq 2$, não são clique-perfeitos:
 $\alpha_C(C_{2k+1}) = k$ e $\tau_C(C_{2k+1}) = k + 1$.
- ▶ Os complementos de buracos $\overline{C_n}$, $n \geq 5$, são clique-perfeitos se e somente se n é múltiplo de três (B. Reed, 2000):
 $\tau_C(\overline{C_n}) = 3$ e $\alpha_C(\overline{C_n}) = 2$ ou 3 , sendo 3 só no caso em que n seja múltiplo de três.



C_5

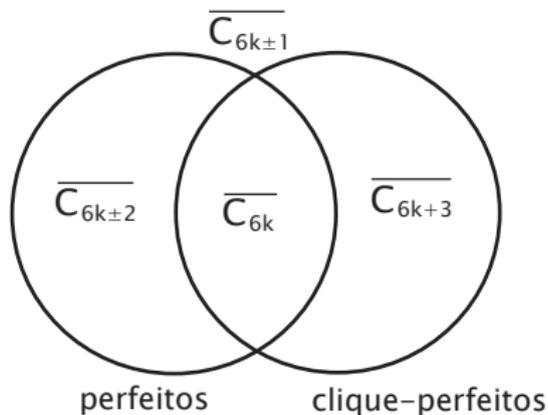


$\overline{C_7}$



$\overline{C_9}$

Temos o seguinte esquema de relação entre grafos perfeitos e clique-perfeitos:



Nas classes que nós estudamos até agora, os grafos não podem conter complementos de buracos $\overline{C_n}$ com $n \geq 8$. Então nessas classes, pelo TFGP, os grafos clique-perfeitos são também perfeitos.

Famílias de grafos que são clique-perfeitos

- ▶ **Grafos de comparabilidade.** Um grafo é de comparabilidade se existe uma orientação transitiva das suas arestas.
- ▶ **Grafos balanceados.** Um grafo é balanceado se a sua matriz de incidência vértices-cliques é balanceada. Uma matriz binária é balanceada se não contém como submatriz a matriz de incidência de um ciclo ímpar.

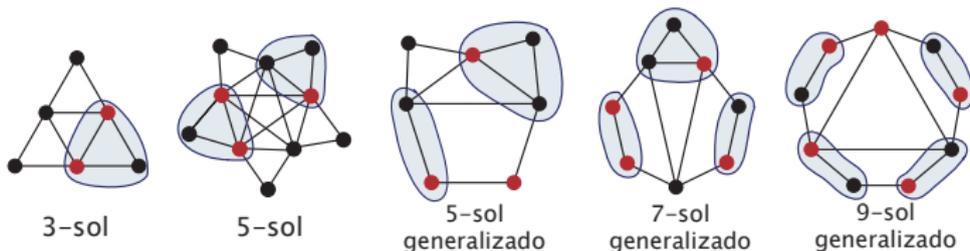
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
M_1	1	1	0	0	0
M_2	0	1	1	0	0
M_3	0	0	1	1	0
M_4	0	0	0	1	1
M_5	1	0	0	0	1

Famílias de grafos que não são clique-perfeitos

- ▶ Complementos de buracos que não são múltiplos de três.
- ▶ Sóis generalizados ímpares (generaliza sóis e buracos ímpares).
- ▶ Grafos Q_{6k+3} , $k \geq 0$.
- ▶ Famílias S_k^1 e S_k^2 , $k \geq 2$.

Sóis generalizados ímpares

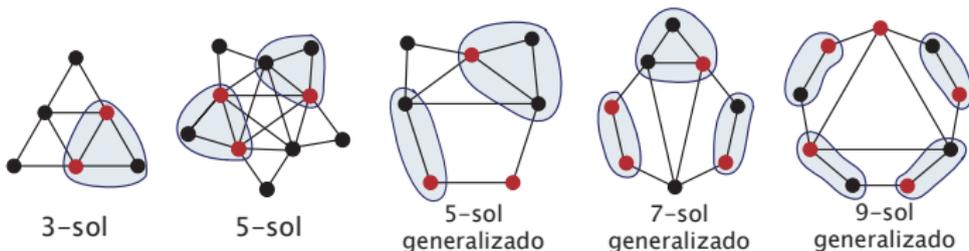
Os sóis ímpares não são clique-perfeitos: eles têm, como os buracos ímpares, $\alpha_C((2k+1)\text{-sol}) = k$ e $\tau_C((2k+1)\text{-sol}) = k+1$. Uma definição que generaliza buracos ímpares e sóis ímpares é a de os sóis generalizados ímpares (com Jayme, Willy e Marina). Uma aresta num ciclo é imprópria se faz parte de um triângulo com um outro vértice do ciclo. Um sol generalizado ímpar está formado por um ciclo ímpar, e um vértice por cada aresta imprópria adjacente somente aos seus extremos.



Eles têm $\alpha_C((2k+1)\text{-sol gen.}) = k$ e $\tau_C((2k+1)\text{-sol gen.}) \geq k+1$.

Sóis generalizados ímpares

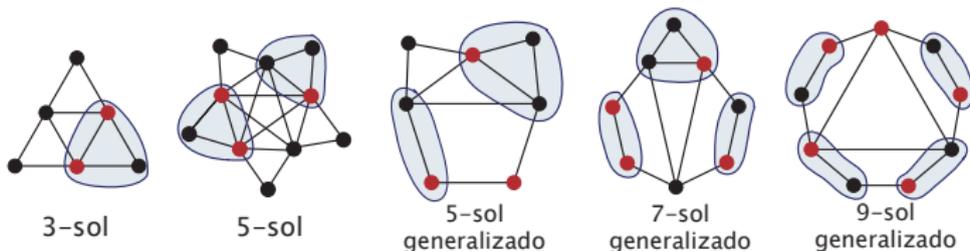
Os sóis ímpares não são clique-perfeitos: eles têm, como os buracos ímpares, $\alpha_C((2k+1)\text{-sol}) = k$ e $\tau_C((2k+1)\text{-sol}) = k+1$. Uma definição que generaliza buracos ímpares e sóis ímpares é a de os sóis generalizados ímpares (com Jayme, Willy e Marina). Uma aresta num ciclo é imprópria se faz parte de um triângulo com um outro vértice do ciclo. Um sol generalizado ímpar está formado por um ciclo ímpar, e um vértice por cada aresta imprópria adjacente somente aos seus extremos.



Eles têm $\alpha_C((2k+1)\text{-sol gen.}) = k$ e $\tau_C((2k+1)\text{-sol gen.}) \geq k+1$.

Sóis generalizados ímpares

Os sóis ímpares não são clique-perfeitos: eles têm, como os buracos ímpares, $\alpha_C((2k + 1)\text{-sol}) = k$ e $\tau_C((2k + 1)\text{-sol}) = k + 1$. Uma definição que generaliza buracos ímpares e sóis ímpares é a de os sóis generalizados ímpares (com Jayme, Willy e Marina). Uma aresta num ciclo é imprópria se faz parte de um triângulo com um outro vértice do ciclo. Um sol generalizado ímpar está formado por um ciclo ímpar, e um vértice por cada aresta imprópria adjacente somente aos seus extremos.



Eles têm $\alpha_C((2k + 1)\text{-sol gen.}) = k$ e $\tau_C((2k + 1)\text{-sol gen.}) \geq k + 1$.

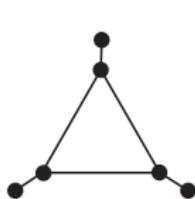
Sóis generalizados ímpares

Com esta definição, os sóis generalizados ímpares não são necessariamente minimais.

É ainda aberta a caracterização dos sóis generalizados minimais e dos sóis generalizados minimalmente clique-imperfeitos.

Grafos Q_{6k+3} , $k \geq 0$

A família de grafos Q_n foi definida por J. Szwarcfiter, C. Lucchesi e C. P. de Mello. Para n ímpar, $\alpha_C(Q_n) = 1$ e $\tau_C(Q_n) = 2$ (são exatamente os grafos clique-completos sem vértice universal minimais).



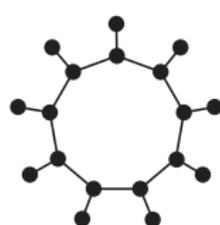
$\overline{Q_3}$



$\overline{Q_5}$



$\overline{Q_7}$

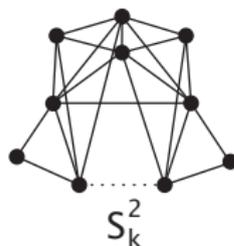
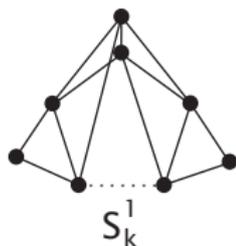


$\overline{Q_9}$

Mais só os Q_n com n ímpar e múltiplo de três são clique-imperfeitos minimais, os outros contêm complementos de buracos.

Famílias S_k^1 e S_k^2 , $k \geq 2$

As famílias de grafos S_k^1 e S_k^2 , $k \geq 2$, são definidas a partir de um ciclo de $2k + 1$ vértices, como se vê na figura, onde as linhas pontilhadas representam um caminho induzido ímpar (pode ser uma única aresta).



Eles têm $\alpha_C(S_k^i) = k$ e $\tau_C(S_k^i) = k + 1$, para $i = 1, 2$.

Resultados prévios

- ▶ O grafo clique $K(G)$ de um grafo G é o grafo interseção das cliques de G .
- ▶ Vale a seguinte relação:
 - ▶ $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$.
 - ▶ $\alpha_C(G) \leq k(K(G))$, e se G é clique-Helly, $\alpha_C(G) = k(K(G))$.
- ▶ Um grafo G é K-perfeito se $K(G)$ é perfeito.
- ▶ Se o grafo G é clique-Helly e K-perfeito, então $\alpha_C(G) = \alpha(K(G)) = k(K(G)) = \tau_C(G)$.
- ▶ Conseqüentemente, se uma classe de grafos é hereditária, clique-Helly hereditária e K-perfeita, essa classe é clique-perfeita.

Resultados prévios

- ▶ O grafo clique $K(G)$ de um grafo G é o grafo interseção das cliques de G .
- ▶ Vale a seguinte relação:
 - ▶ $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$.
 - ▶ $\tau_C(G) \geq k(K(G))$, e se G é clique-Helly, $\tau_C(G) = k(K(G))$.
- ▶ Um grafo G é K-perfeito se $K(G)$ é perfeito.
- ▶ Se o grafo G é clique-Helly e K-perfeito, então $\alpha_C(G) = \alpha(K(G)) = k(K(G)) = \tau_C(G)$.
- ▶ Conseqüentemente, se uma classe de grafos é hereditária, clique-Helly hereditária e K-perfeita, essa classe é clique-perfeita.

Resultados prévios

- ▶ O grafo clique $K(G)$ de um grafo G é o grafo interseção das cliques de G .
- ▶ Vale a seguinte relação:
 - ▶ $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$.
 - ▶ $\tau_C(G) \geq k(K(G))$, e se G é clique-Helly, $\tau_C(G) = k(K(G))$.
- ▶ Um grafo G é K-perfeito se $K(G)$ é perfeito.
- ▶ Se o grafo G é clique-Helly e K-perfeito, então $\alpha_C(G) = \alpha(K(G)) = k(K(G)) = \tau_C(G)$.
- ▶ Conseqüentemente, se uma classe de grafos é hereditária, clique-Helly hereditária e K-perfeita, essa classe é clique-perfeita.

Resultados prévios

- ▶ O grafo clique $K(G)$ de um grafo G é o grafo interseção das cliques de G .
- ▶ Vale a seguinte relação:
 - ▶ $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$.
 - ▶ $\tau_C(G) \geq k(K(G))$, e se G é clique-Helly, $\tau_C(G) = k(K(G))$.
- ▶ Um grafo G é K-perfeito se $K(G)$ é perfeito.
- ▶ Se o grafo G é clique-Helly e K-perfeito, então $\alpha_C(G) = \alpha(K(G)) = k(K(G)) = \tau_C(G)$.
- ▶ Conseqüentemente, se uma classe de grafos é hereditária, clique-Helly hereditária e K-perfeita, essa classe é clique-perfeita.

Resultados prévios

- ▶ O grafo clique $K(G)$ de um grafo G é o grafo interseção das cliques de G .
- ▶ Vale a seguinte relação:
 - ▶ $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$.
 - ▶ $\tau_C(G) \geq k(K(G))$, e se G é clique-Helly, $\tau_C(G) = k(K(G))$.
- ▶ Um grafo G é K-perfeito se $K(G)$ é perfeito.
- ▶ Se o grafo G é clique-Helly e K-perfeito, então $\alpha_C(G) = \alpha(K(G)) = k(K(G)) = \tau_C(G)$.
- ▶ Conseqüentemente, se uma classe de grafos é hereditária, clique-Helly hereditária e K-perfeita, essa classe é clique-perfeita.

Resultados prévios

- ▶ O grafo clique $K(G)$ de um grafo G é o grafo interseção das cliques de G .
- ▶ Vale a seguinte relação:
 - ▶ $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$.
 - ▶ $\tau_C(G) \geq k(K(G))$, e se G é clique-Helly, $\tau_C(G) = k(K(G))$.
- ▶ Um grafo G é K-perfeito se $K(G)$ é perfeito.
- ▶ Se o grafo G é clique-Helly e K-perfeito, então $\alpha_C(G) = \alpha(K(G)) = k(K(G)) = \tau_C(G)$.
- ▶ Conseqüentemente, se uma classe de grafos é hereditária, clique-Helly hereditária e K-perfeita, essa classe é clique-perfeita.

Resultados prévios

- ▶ O grafo clique $K(G)$ de um grafo G é o grafo interseção das cliques de G .
- ▶ Vale a seguinte relação:
 - ▶ $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$.
 - ▶ $\tau_C(G) \geq k(K(G))$, e se G é clique-Helly, $\tau_C(G) = k(K(G))$.
- ▶ Um grafo G é K-perfeito se $K(G)$ é perfeito.
- ▶ Se o grafo G é clique-Helly e K-perfeito, então $\alpha_C(G) = \alpha(K(G)) = k(K(G)) = \tau_C(G)$.
- ▶ Conseqüentemente, se uma classe de grafos é hereditária, clique-Helly hereditária e K-perfeita, essa classe é clique-perfeita.

Grafos cordais

Um grafo é cordal quando todo ciclo de comprimento maior que três tem uma corda. Os grafos cordais tem reconhecimento polinomial (Rose, Tarjan e Lueker, 1976).

Teorema (Lehel e Tuza, 1986)

Seja G um grafo cordal. São equivalentes:

1. G não contém sóis ímpares.
2. G é balanceado.
3. G é clique-perfeito.

O reconhecimento de grafos clique-perfeitos para grafos cordais se reduz então ao reconhecimento de grafos balanceados, que é polinomial (Conforti, Cornuéjols e Rao, 1999).

Grafos de linha

Seja H um grafo. O grafo $L(H)$ é o grafo interseção das arestas de H . Um grafo G é um grafo de linha se existe um grafo H tal que $G = L(H)$. Os grafos de linha tem reconhecimento polinomial (Lehot, 1974).

Teorema

Seja G um grafo de linha. São equivalentes:

1. G não contém um 3-sol nem buracos ímpares.
2. G é clique-perfeito.
3. G é perfeito e sem 3-sol.

O reconhecimento de grafos clique-perfeitos para grafos de linha se reduz então ao reconhecimento de grafos perfeitos e sem 3-sol, que é polinomial.

Esquema da prova

Teorema

Seja G um grafo de linha. São equivalentes:

1. G não contém um 3-sol nem buracos ímpares.
2. G é clique-perfeito.
3. G é perfeito e sem 3-sol.

$1 \Leftrightarrow 3$ é um corolário do TFGP, porque os grafos de linha não podem conter complementos de buracos \overline{C}_n com $n \geq 7$.

$2 \Rightarrow 1$ é fácil.

Para provar $1 \Rightarrow 2$, primeiro provamos que os grafos de linha que não contém um 3-sol nem buracos ímpares são K-perfeitos. Então provamos o resultado por indução, tomando como caso base o caso em que o grafo é clique-Helly hereditário.

Grafos clique-Helly hereditários sem $K_{1,3}$

Teorema

Seja G um grafo clique-Helly hereditário sem $K_{1,3}$. São equivalentes:

1. G não contém $\overline{C_7}$ nem buracos ímpares.
2. G é clique-perfeito.
3. G é perfeito.

O reconhecimento de grafos clique-perfeitos para grafos clique-Helly hereditários sem $K_{1,3}$ se reduz então ao reconhecimento de grafos perfeitos, que é polinomial.

Esquema da prova

Teorema

Seja G um grafo clique-Helly hereditário sem $K_{1,3}$. São equivalentes:

1. G não contém $\overline{C_7}$ nem buracos ímpares.
2. G é clique-perfeito.
3. G é perfeito.

$1 \Leftrightarrow 3$ é um corolário do TFGP, porque os grafos clique-Helly hereditários não podem conter complementos de buracos $\overline{C_n}$ com $n \geq 9$.

$2 \Rightarrow 1$ é fácil.

Para provar $1 \Rightarrow 2$, provamos que os grafos clique-Helly hereditários sem $K_{1,3}$ que não contém $\overline{C_7}$ nem buracos ímpares são K-perfeitos. A prova é por indução, baseada em teoremas de decomposição de grafos sem $K_{1,3}$.

Grafos sem diamantes

Teorema

Seja G um grafo sem diamantes. São equivalentes:

1. G não contém sóis generalizados ímpares.
2. G é clique-perfeito.

Os sóis generalizados que não tem diamantes são sóis generalizados sem arestas impróprias. Neste caso, a caracterização não está formulada ainda por subgrafos proibidos minimais.

Esquema da prova

Teorema

Seja G um grafo sem diamantes. São equivalentes:

1. G não contém sóis generalizados ímpares.
2. G é clique-perfeito.

$2 \Rightarrow 1$ é fácil.

Para provar $1 \Rightarrow 2$, provamos que os grafos sem diamantes que não contém sóis generalizados ímpares são K -perfeitos. Basta observar então que os grafos sem diamantes são clique-Helly hereditários.

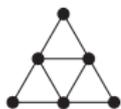
Grafos arco-circulares Helly

Um grafo G é arco-circular Helly se existe uma família de arcos numa circunferência que verifica a propriedade de Helly tal que G é o grafo interseção dessa família.

Teorema

Seja G um grafo arco-circular Helly. São equivalentes:

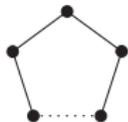
1. G não contém nenhum dos grafos da figura, onde as linhas pontilhadas representam um caminho induzido ímpar (pode ser uma única aresta).
2. G é clique-perfeito.



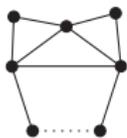
3-sol



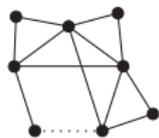
$\overline{C_7}$



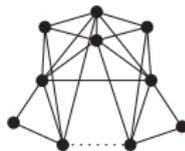
buracos ímpares



soís generalizados ímpares



S_k^1



S_k^2

Esquema da prova

Teorema

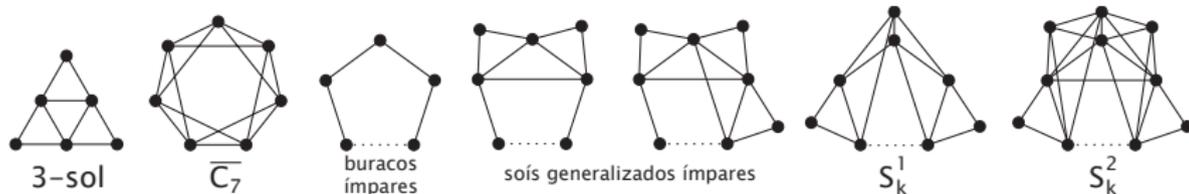
Seja G um grafo arco-circular Helly. São equivalentes:

1. G não contém nenhum dos grafos da figura, onde as linhas pontilhadas representam um caminho induzido ímpar (pode ser uma única aresta).
2. G é clique-perfeito.

$2 \Rightarrow 1$ é fácil.

Para provar $1 \Rightarrow 2$, provamos que os grafos arco-circulares Helly que não contém nenhum dos grafos da figura são K -perfeitos. O resto da prova está baseada em que os grafos arco-circulares Helly que não são clique-Helly hereditários tem $\alpha_C = \tau_C$ ou são K -completos, e usamos a caracterização dos grafos K -completos de Jayme, C. Lucchesi e C. Picinin de Mello.

Reconhecimento



O algoritmo de reconhecimento está baseado no algoritmo de reconhecimento de grafos perfeitos.

Os grafos arco-circular Helly tem reconhecimento polinomial (Spinrad, 1997).