



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Isomorfismo fraccionario de grafos e hipergrafos y sus
aplicaciones

Dora Elena Tilli

Directora: Dra. Flavia Bonomo

Abril de 2016

A Laura y Gustavo

Resumen

Dos grafos G y H son isomorfos ($G \simeq H$) si únicamente difieren en cómo están nombrados sus vértices. Dadas las matrices de adyacencia A y B de los dos grafos G y H , tenemos que A se puede calcular como $A = PBP^{-1}$ donde P es una matriz de permutación (es decir, P tiene sólo un 1 en cada fila y columna y sus demás coeficientes son 0). La relación anterior puede ser escrita como $AP = PB$. Diremos que $G \approx_f H$ (G y H son isomorfos fraccionarios) si se cumple la relación “relajada” $AS = SB$ donde S es una matriz doble estocástica (es decir, S tiene todos sus coeficientes no negativos y la suma de cada columna y de cada fila da 1). Como las matrices de permutación son casos particulares de matrices doble estocásticas, nos queda que dos grafos isomorfos son también isomorfos fraccionarios. Pero mucho más puede ser dicho sobre el isomorfismo fraccionario.

Para trabajar con el tema del isomorfismo fraccionario de grafos, seguiremos el capítulo 6 del libro *Fractional Graph Theory - A rational approach to the theory of graphs* de E.R. Scheinermann y D.H. Ullman. Así, la primera parte de esta tesis será simplemente una traducción (con algunos cambios pequeños) del capítulo 6 del mencionado libro. Esta primera parte nos servirá de introducción para entender el “estado del arte” con respecto al isomorfismo fraccionario de grafos. En cambio, las partes siguientes (capítulos 2, 3 y 4 de la tesis) son trabajo original. En particular, en el capítulo 2 extenderemos el concepto de isomorfismo fraccionario de grafos al caso más general de hipergrafos. Utilizando estos hipergrafos, en el capítulo 4 podremos mostrar que los números fraccionarios de empaque y cubrimiento son invariantes por el isomorfismo fraccionario. Para esto, trabajaremos con algunos resultados de la programación lineal (para calcular los números fraccionarios de empaque y cubrimiento necesitamos la noción de hipergrafo y no sólo la de grafo). Por otra parte, en el capítulo 3 estudiaremos el isomorfismo fraccionario de los grafos de línea de grafos dados y analizaremos el análogo fraccionario al teorema de Whitney (dos grafos de línea son isomorfos si y sólo si los grafos originales son isomorfos salvo un único caso particular).

Índice general

1. Isomorfismo fraccionario de grafos	1
1.1. Definiciones básicas y notación	1
1.2. Introducción	2
1.3. Algunas herramientas del álgebra lineal	6
1.3.1. Suma directa y reducibilidad	6
1.3.2. Matrices positivas: el teorema de Perron-Frobenius	7
1.3.3. Matrices doble estocásticas y su descomposición de Birkhoff	8
1.3.4. Producto de Kronecker	9
1.4. Particiones equitativas	10
1.5. Secuencias iteradas de grados	12
1.6. El teorema principal sobre isomorfismo fraccionario	12
1.6.1. Algunas consecuencias del teorema principal	14
2. Isomorfismo fraccionario de hipergrafos	17
2.1. Introducción a los hipergrafos	17
2.2. Isomorfismo fraccionario de hipergrafos	18
2.2.1. Ejemplos y casos particulares	18
2.2.2. Caso general	24
2.2.3. Un ejemplo final	27
3. Grafos de línea	29
3.1. Introducción	29
3.2. La versión fraccionaria del Teorema de Whitney	31
3.2.1. Ejemplos y casos particulares	31
3.2.2. Algunas consideraciones sobre la reducibilidad de las particiones	32
3.3. Algunos contraejemplos al T. de Whitney en su versión fraccionaria	36
4. Invariantes fraccionarios	39
4.1. Cubrimiento y empaque de un hipergrafo	39
4.1.1. El número fraccionario de cubrimiento y empaque para grafos isomorfos fraccionarios	41
4.2. Aplicaciones al apareamiento fraccionario	41
5. Conclusiones	43

Capítulo 1

Isomorfismo fraccionario de grafos

1.1. Definiciones básicas y notación

Denotaremos un *grafo* G por un par $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de *vértices* de G , y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices de G , llamados *aristas*. Sean $n = v(G) = |V(G)|$ y $m = \varepsilon(G) = |E(G)|$.

Un vértice v es *adyacente* a otro vértice w en G si $(v, w) \in E(G)$. Decimos que v y w son los *extremos* de la arista. El *vecindario* de un vértice v es el conjunto $N(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a v . Un vértice v es *aislado* cuando $N(v) = \emptyset$. El *grado* de un vértice v es la cardinalidad del conjunto $N(v)$ y se nota $d(v)$. Un grafo se dice *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si se quiere especificar ese grado común r , se dice que el grafo es *r -regular*.

Un grafo H es un *subgrafo* de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G *inducido* por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X , y lo notamos $G[X]$.

Un *camino* en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, v_2, \dots, v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, \dots, k - 1$. Un grafo G es *conexo* si para todo par de vértices distintos v y w de G existe un camino de v a w .

Llamamos C_k al grafo con k vértices v_1, v_2, \dots, v_k , donde v_1, \dots, v_k es un camino, v_1 es adyacente a v_k , no hay otras aristas en el grafo, y $k \geq 3$.

Un grafo G es *completo* si cualquier par de vértices distintos de G son adyacentes. Llamamos K_n al grafo completo con n vértices.

Un conjunto de vértices I de un grafo G es un *conjunto independiente* si ninguna arista de G tiene ambos extremos en I . Un parámetro muy estudiado de un grafo G es su número de estabilidad $\alpha(G)$, definido como la cardinalidad de un conjunto independiente máximo de G .

Un *coloreo* de un grafo G es una partición de $V(G)$, donde cada clase de la partición es un conjunto independiente al que identificamos con un color. Un *k -coloreo* es una partición de $V(G)$ en k conjuntos independientes. Si G admite un k -coloreo, decimos que G es *k -cromático*. El *número cromático* de G es el menor k para el cual existe un k -coloreo de G y se nota $\chi(G)$.

Un grafo es *bipartito* si es 2-coloreable, y una *bipartición* es una partición de sus vértices en dos conjuntos independientes. Un grafo bipartito de bipartición (A, B) se dice *bi-regular* si los vértices de A tienen el mismo grado a y los vértices de B tienen el mismo grado b (no necesariamente $a = b$). Si queremos explicitar esos valores, decimos (a, b) -*regular*. Si todo vértice de A es adyacente a todo vértice de B decimos que el grafo es *bipartito completo* y lo notamos $K_{|A|,|B|}$. Dado un grafo G y dos subconjuntos disjuntos A y B de $V(G)$, el grafo bipartito $G[A, B]$ se define como el subgrafo de G formado por los vértices $A \cup B$ y las aristas de G que tienen un extremo en A y uno en B . Notar que no necesariamente es un subgrafo inducido de G .

Dado un grafo G , definimos el *grafo de línea* $L(G)$ como un nuevo grafo en el cual los vértices son las aristas de G y dos vértices en $L(G)$ son adyacentes si y sólo si las correspondientes aristas en G tienen un vértice en común.

Decimos que G es un *digrafo*, o un grafo dirigido, si las aristas están dadas por un conjunto de pares *ordenados* de vértices, llamados *arcos*. El concepto de camino se extiende a digrafos pero ahora (v_i, v_{i+1}) es un arco. Un digrafo es *fuertemente conexo* si para todo par de vértices distintos v y w de G existe un camino (dirigido) de v a w y uno de w a v .

Dado un grafo G cuyos vértices están numerados de 1 a n , definimos la *matriz de adyacencia* de G como $M \in \{0, 1\}^{n \times n}$ donde $M(i, j) = 1$ si los vértices i y j son adyacentes y 0 en otro caso.

Numerando las aristas de G de 1 a m , definimos la *matriz de incidencia* de G como $M \in \{0, 1\}^{n \times m}$ donde $M(i, j) = 1$ si el vértice i es uno de los extremos de la arista j y 0 en otro caso.

Un grafo es *planar* si puede ser dibujado en el plano sin que sus aristas se crucen.

Definiciones no dadas aquí pueden encontrarse en [2] o [7].

1.2. Introducción

Dos grafos son *isomorfos* si únicamente difieren en como están nombrados sus vértices. En ese sentido, dos grafos G y H ($G \simeq H$) son isomorfos si existe una biyección $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ si y sólo si $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. Si A y B son las matrices de adyacencia de los grafos G y H , podemos escribir esta relación como $A = PBP^{-1}$ donde P es una matriz de permutación (es decir, P permuta columnas o filas según esté multiplicando a derecha o a izquierda). En particular, P es una matriz cuadrada con sólo ceros y unos como coeficientes y con la propiedad que hay sólo un 1 por fila y por columna. La relación $A = PBP^{-1}$ también puede ser escrita como $AP = PB$. Es esta última relación la que va a ser relajada en el isomorfismo fraccionario.

Llamaremos a una matriz S *doble estocástica* si todos los coeficientes de S son no negativos y cada fila y cada columna de S suma exactamente 1 (es decir, $S \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$ y $S^t \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$). Es fácil ver, que con estas condiciones todos los coeficientes de S pertenecen al intervalo $[0, 1]$ y sumando las columnas de S y las filas de S nos queda que S tiene que ser una matriz cuadrada. Diremos que dos grafos G y H

son *isomorfos fraccionarios* (y lo escribiremos $G \approx_f H$) si existe una matriz S doble estocástica tal que $AS = SB$ donde A, B son las matrices de adyacencia de G y H . Luego caracterizaremos esta relación de equivalencia y la extenderemos a hipergrafos.

Notación: Siempre que escribamos $S \cdot 1 = 1$ con “1” nos estaremos refiriendo al vector con n unos como coeficientes. Así 1 corresponde a $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ y la expresión $S \cdot 1 = 1$

corresponde a $S \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ donde S es una matriz doble estocástica de $n \times n$.

Proposición 1.1. *La relación $G \approx_f H$ es una relación de equivalencia.*

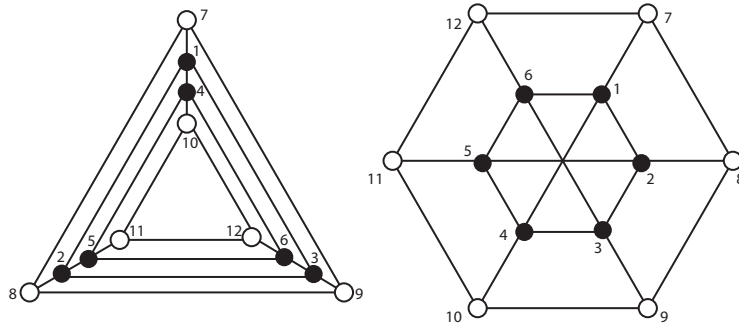
Demostración. Veamos que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: $AI = IA$ donde I es la identidad y por tanto una matriz doble estocástica.

Simétrica: si $AS = SB$ entonces trasponiendo nos queda que $S^t A = BS^t$ (porque las matrices de adyacencia son simétricas, $A^t = A$ y $B^t = B$). Por tanto tenemos que $BU = UA$ con $U = S^t$ matriz doble estocástica.

Transitiva: si $AS_1 = S_1B$ y $AS_2 = S_2C$ nos queda que $S_1^t A = BS_1^t$, multiplicando a izquierda esta expresión por S_2 nos queda que $S_1^t AS_2 = BS_1^t S_2$. Por tanto $S_1^t S_2 C = BS_1^t S_2$. Basta ver que $U = S_1^t S_2$ es doble estocástica. Pero es fácil ver que el producto de dos matrices doble estocásticas es doble estocástica también, basta multiplicar por el vector 1: $U \cdot 1 = S_1^t S_2 \cdot 1 = S_1^t \cdot 1 = 1$ y $U^t \cdot 1 = S_2^t S_1 \cdot 1 = S_2^t \cdot 1 = 1$. \square

Por ejemplo, los siguientes dos grafos G y H son isomorfos fraccionarios:



Para comprobarlo escribimos sus matrices de adyacencia,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
& \text{y } SB = \frac{1}{6} \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

por lo que $G \approx_f H$ y sin embargo G no es isomorfo a H (G es planar y H no lo es). No obstante, G y H tienen en común:

- G y H tienen el mismo número de vértices
- G y H tienen el mismo número de aristas
- G y H tienen la misma secuencia de grados $\{4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3\}$
- G y H tienen el mismo máximo autovalor $(\frac{5+\sqrt{5}}{2})$.

Estas similitudes se cumplen siempre que dos grafos sean isomorfos fraccionarios.

Proposición 1.2. *Dos grafos isomorfos fraccionarios tienen la misma cantidad de vértices.*

Demostración. Dado que S debe ser cuadrada de $n \times n$ para ser doble estocástica queda que A y B también son de $n \times n$. \square

Proposición 1.3. *Dos grafos isomorfos fraccionarios tienen la misma cantidad de aristas.*

Demostración. Sean A y B las matrices de adyacencia de dos grafos isomorfos fraccionarios G y H . Entonces existe S doble estocástica tal que $AS = SB$. Dado que $1^t \cdot A \cdot 1 = 2\varepsilon(G)$ donde $\varepsilon(G)$ es el número de aristas de G , entonces

$$\begin{aligned} 2\varepsilon(G) &= 1^t \cdot A \cdot (S \cdot 1) \\ &= 1^t \cdot (AS) \cdot 1 \\ &= 1^t \cdot (SB) \cdot 1 \\ &= (1^t S) \cdot B \cdot 1 \\ &= 1^t \cdot B \cdot 1 \\ &= 2\varepsilon(H). \end{aligned}$$

□

Más adelante veremos que las secuencias de grados de dos grafos isomorfos fraccionarios deben ser las mismas y que el máximo autovalor también.

Proposición 1.4. *Si G y H son dos grafos r -regulares con n vértices entonces $G \approx_f H$.*

Demostración. Llamemos $S = \frac{1}{n}J_n$ donde J_n es la matriz de $n \times n$ con todos sus coeficientes iguales a 1. Entonces $AS = \frac{1}{n}AJ_n = \frac{r}{n}J_n$ y $SB = \frac{1}{n}J_nB = \frac{r}{n}J_n$. Por lo que $AS = SB$. □

En particular, por ejemplo, C_6 es isomorfo fraccionario a la unión disjunta de dos K_3 (ambos grafos son 2-regulares de 6 vértices). Vemos entonces que el isomorfismo fraccionario no conserva conectividad.

Es importante notar que en la mayoría de los casos la matriz S doble estocástica que multiplica a A y B tiene determinante 0, por lo que los determinantes de A y B pueden no coincidir.

El análisis del isomorfismo fraccionario necesita de algunas herramientas del álgebra lineal para aplicar a las matrices doble estocásticas (ver, por ejemplo, [3]). Primero, al ser matrices positivas, sus autovalores y autovectores tienen propiedades particulares. Segundo, las matrices doble estocásticas pueden ser escritas como combinaciones convexas de matrices de permutación.

1.3. Algunas herramientas del álgebra lineal

1.3.1. Suma directa y reducibilidad

Sean A y B dos matrices cuadradas (no necesariamente de las mismas dimensiones). La suma directa de A y B es la matriz cuadrada

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Si $M = A \oplus B$ decimos que M es *descomponible*. En general, M es descomponible si existen A, B, P y Q tales que P y Q son dos matrices de permutación y

$M = P(A \oplus B)Q$. Si no existe una descomposición así, decimos que M es *indescomponible*.

Sea M una matriz de $n \times n$. Sea $D(M)$ el digrafo con n vértices v_1, \dots, v_n con un arco de v_i a v_j si $M_{ij} \neq 0$. Decimos que M es *irreducible* si $D(M)$ es fuertemente conexo. Si no, decimos que M es *reducible*. En particular M es reducible sólo cuando existe una matriz P de permutación tal que $PM P^t = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ donde A y C son matrices cuadradas.

Además, decimos que M es una matriz *fuertemente irreducible* si PM es irreducible para toda matriz de permutación P . Si M no es fuertemente irreducible podemos encontrar matrices de permutación P y Q tales que $PMQ = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ donde A y C son matrices cuadradas.

Proposición 1.5. *Sea S una matriz doble estocástica y también indescomponible. Entonces S es fuertemente irreducible.*

Demostración. Supongamos que S no sea fuertemente irreducible, entonces podemos permutar las filas y columnas de S tal que $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$ donde S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas. Entonces, veamos que S_{12} también es una matriz rectangular con sus coeficientes todos iguales a 0 (por tanto, S es descomponible). Como S es doble estocástica la suma de cada columna de S_{11} es 1 y por lo tanto la suma de todos los coeficientes de S_{11} es a ($a \times a$ es la dimensión de S_{11}). Pero también la suma de todos los coeficientes de $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \end{bmatrix}$ es a porque hay a filas y cada fila suma 1. Luego todos los coeficientes de S_{12} deben ser 0. Por lo que $S = S_{11} \oplus S_{22}$, es decir, S es descomponible. \square

1.3.2. Matrices positivas: el teorema de Perron-Frobenius

Sea M una matriz. Escribimos $M \geq 0$ para expresar que cada coeficiente de M es no negativo y decimos que M es *no negativa*. De la misma forma, $M > 0$ expresa que todos los coeficientes de M son positivos y decimos que M es *positiva*. También podemos hablar de *vectores positivos*.

Un *autovalor dominante* de una matriz cuadrada M es un autovalor λ de M cuyo valor absoluto es mayor o igual al de cualquier otro autovalor de M .

El principal teorema sobre matrices no negativas es el de Perron-Frobenius.

Teorema 1.6. *Sea M una matriz irreducible y no negativa. Entonces M tiene un único autovalor dominante λ que es positivo, simple, y tiene asociado un autovector positivo. Más aún, los autovectores asociados a otros autovalores son no negativos.*

1.3.3. Matrices doble estocásticas y su descomposición de Birkhoff

Teorema 1.7. *Sea S una matriz doble estocástica. Entonces, existen números positivos $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ y matrices de permutación P_1, \dots, P_s tal que*

$$S = \sum_{i=1}^s \alpha_i P_i \quad y \quad 1 = \sum_{i=1}^s \alpha_i.$$

El resultado se puede expresar diciendo que toda matriz doble estocástica es una combinación convexa de matrices de permutación. La descomposición $S = \sum_{i=1}^s \alpha_i P_i$ es llamada la *descomposición de Birkhoff* de una matriz doble estocástica S .

El conjunto de matrices doble estocásticas forma un subconjunto compacto y convexo del conjunto de todas las matrices reales donde los puntos extremales de este conjunto convexo son las matrices de permutación.

Sea S una matriz doble estocástica y x un vector. El vector Sx es una lista de promedios pesados de los coeficientes de x . Si R es otra matriz doble estocástica y $R(Sx) = x$, entonces, se puede pensar que no hubo “pérdida de información”. Intuitivamente, esto es sólo posible, si Sx y x tienen los mismos coeficientes, es decir Sx es una permutación de x .

Teorema 1.8. *Sean S y R dos matrices doble estocásticas de $n \times n$ con descomposiciones de Birkhoff $S = \sum \alpha_i P_i$ y $R = \sum \beta_j Q_j$ y sean x e y vectores de n coordenadas.*

- (1) *Si $y = Sx$ y $x = Ry$, entonces $y = P_i x$ y $x = Q_j y$ para todo i, j .*
- (2) *Sean x e y como en (1). Si además, S o R es indescomponible, entonces $x = y = s \cdot 1$ para algún escalar s .*
- (3) *Si x e y son $0, 1$ -vectores (sus coordenadas son ceros o unos) y además $y = Sx$ entonces $y = P_i x$ para todo i .*

Demostración. La demostración de este resultado necesita la definición del siguiente conjunto convexo. Sea v un vector. Sea $\Pi(v)$ la cápsula convexa de todos los vectores formados por las permutaciones de los coeficientes de v . Notemos que los puntos extremales de $\Pi(v)$ son todas las permutaciones de v , es decir los vectores de la forma Pv con P una matriz de permutación. Consideremos, ahora, que $y = Sx$ donde S es doble estocástica. Dado que $S = \sum \alpha_i P_i$, tenemos que $y = Sx = \sum \alpha_i P_i x$ y por tanto y es una combinación convexa de las permutaciones de x , es decir $y \in \Pi(x)$. Más aún, si P' es alguna permutación entonces $P'y = P'Sx = \sum \alpha_i (P'P_i)x$; por lo que $P'y \in \Pi(x)$. Nos queda que todos los puntos extremales de $\Pi(y)$ están en $\Pi(x)$. Luego, si S es doble estocástica y $y = Sx$ entonces $\Pi(y) \subseteq \Pi(x)$.

Probemos ahora el teorema: (1) veamos que $y = Sx$ y $x = Ry$ implica que $\Pi(x) = \Pi(y)$. Entonces x e y son puntos extremales de esta cápsula convexa. Como $y = \sum \alpha_i P_i x$ debemos tener que $y = P_i x$ para todo i y de la misma manera

$x = Q_j y$ para todo j . (2) primero notemos que si x o y es 0, entonces ambos son 0 y la conclusión es válida. Así que supongamos que x e y no son 0 y S es indescomponible. Sabemos que $y = Sx$ y $x = Qy$ para alguna matriz de permutación Q . Entonces $x = QSx$ y x es un autovector de QS con autovalor 1. Además, notemos que también el vector 1 es autovector con autovalor 1. Como S es no negativa e indescomponible es fuertemente irreducible lo que garantiza que QS es irreducible. Usando el teorema anterior nos queda que QS tiene un único autovalor dominante que es positivo y tiene asociado un autovector positivo. Por lo que se sigue que x es un múltiplo del vector 1. (3) sabemos solamente que $y = Sx$ y que $x, y \in \{0, 1\}^n$. Como $y \in \Pi(x)$, nos queda que $1^t y = 1^t Sx = 1^t x$ por lo que x e y tienen el mismo número de unos. Es decir, x es una permutación de y . Por lo que y es un punto extremo de $\Pi(x)$ y dado que $y = \sum \alpha_i P_i x$, tenemos que $y = P_i x$ para todo i . \square

Una aplicación del teorema es que dos grafos isomorfos fraccionarios G y H tienen la misma secuencia de grados.

Proposición 1.9. *Si $G \approx_f H$, entonces G y H tienen la misma secuencia de grados.*

Demostración. Sean A y B las matrices de adyacencia de G y H y sea S la matriz doble estocástica con $AS = SB$. Sean $d_G = A \cdot 1$ y $d_H = B \cdot 1$, los vectores cuyas coordenadas son los grados de los vértices de G y H . Entonces $d_G = A \cdot 1 = AS \cdot 1 = SB \cdot 1 = Sd_H$ y $d_H = B \cdot 1 = BS^t \cdot 1 = S^t A \cdot 1 = S^t d_G$. Luego por el teorema anterior tenemos que d_G y d_H son una permutación del otro, es decir, G y H tienen la misma secuencia de grados. \square

1.3.4. Producto de Kronecker

Sean A y B matrices de $n \times n$. El *producto de Kronecker* de A y B , $A \otimes B$, es una matriz de $n^2 \times n^2$ de la siguiente forma:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}B & A_{n2}B & \dots & A_{nn}B \end{bmatrix}$$

donde $A_{ij}B$ es la matriz de $n \times n$ formada multiplicando a B por el escalar A_{ij} . Calculemos ahora qué transformación lineal representa $A \otimes B$. Para matrices de $n \times n$, A , B y X , sea $F_{A,B}(X) = AXB^t$. Entonces, $F_{A,B}$ es una transformación lineal definida en el espacio $\mathbb{R}^{n \times n}$ de todas las matrices reales de $n \times n$. Una base de $\mathbb{R}^{n \times n}$ es el conjunto $\{E(i, j) : 1 \leq i, j \leq n\}$ donde $E(i, j)$ es la matriz con todos sus coeficientes iguales a 0 excepto un 1 en la posición ij . Luego, $F_{A,B}(E(i, j)) = AE(i, j)B^t$ es la matriz cuya coordenada pq se calcula de la siguiente forma: $[AE(i, j)B^t]_{pq} = \sum A_{pa}E(i, j)_{ab}B_{bq}^t = A_{pi}B_{qj}$. Como p y q varían entre 1 y n , obtenemos n^2 entradas en la columna j del bloque i -ésimo de columnas en $A \otimes B$.

Más aún, para una matriz M de $n \times n$, sea $c(M)$ el vector columna de n^2 coeficientes formado al apilar las columnas de M una encima de la otra. Tenemos que $c(F_{A,B}(X)) = (A \otimes B)(c(X))$.

Por lo que $A \otimes B$ es la matriz de la transformación lineal $F_{A,B}$ con respecto a la base $E(i, j)$. Cuando A y B son matrices doble estocásticas vemos que $A \otimes B$ también lo es.

Lema 1.10. Sean A y B dos matrices doble estocásticas de $n \times n$ con descomposiciones de Birkhoff $A = \sum \alpha_i P_i$ y $B = \sum \beta_j Q_j$. Entonces $A \otimes B$ es doble estocástica con descomposición de Birkhoff $A \otimes B = \sum \sum \alpha_i \beta_j (P_i \otimes Q_j)$.

Demostración. Si P y Q son matrices de permutación entonces $P \otimes Q$ también lo es. Luego el bloque kl de $A \otimes B$ se calcula como

$$\begin{aligned} A_{kl}B &= (\sum \alpha_i P_i)_{kl} B \\ &= (\sum \alpha_i P_i)_{kl} (\sum \beta_j Q_j) \\ &= \sum \sum (\alpha_i P_i)_{kl} \beta_j Q_j \\ &= \sum \sum \alpha_i \beta_j (P_i)_{kl} Q_j \end{aligned}$$

luego $A \otimes B = \sum \sum \alpha_i \beta_j (P_i \otimes Q_j)$. \square

1.4. Particiones equitativas

La existencia de un isomorfismo fraccionario entre dos grafos está conectada con el concepto de *particiones equitativas*. En el primer ejemplo que vimos de dos grafos isomorfos fraccionarios se podían pintar los vértices de los dos grafos de blanco y negro de forma tal que los vértices negros tenían grado 4 y los vértices blancos grado 3. De hecho, también se podía observar que cada vértice negro tiene exactamente 3 vecinos blancos y 1 negro y cada vértice blanco tiene 2 vecinos negros y 1 blanco.

Sea S un subconjunto del conjunto de vértices de G . Llamemos $d(v, S)$ al grado de v en S , es decir, el número de vértices vecinos a v en S ($d(v, S) = |N(v) \cap S|$). Decimos que una partición $V_1 \cup \dots \cup V_s$ de $V(G)$ es *equitativa* si para todo i, j y todo $x, y \in V_i$ tenemos que $d(x, V_j) = d(y, V_j)$. En otras palabras, cada uno de los grafos inducidos $G[V_i]$ es regular y cada grafo bipartito $G[V_i, V_j]$ es bi-regular. Es evidente que todo grafo tiene una partición equitativa considerando a cada vértice separado como una parte de la partición. Si G es un grafo regular entonces admite una partición con una única parte, $V(G)$.

Además, las particiones de un conjunto (incluyendo las particiones equitativas de un grafo) pueden ser parcialmente ordenadas por refinamiento. Dadas dos particiones de un conjunto P y Q , podemos formar la partición más fina que es más gruesa que P y Q . La llamamos el *supremo* de P y Q y la denotamos $P \vee Q$. Otra forma de describir el supremo de P y Q es de la siguiente manera: decimos que $x \equiv_P y$ si x e y están en la misma parte de la partición P . (Es fácil ver que \equiv_P es una relación de equivalencia). Sea $R = P \vee Q$ luego $x \equiv_R y$ si y sólo si podemos encontrar z_1, \dots, z_s con $x \equiv z_1 \equiv z_2 \equiv \dots \equiv z_s \equiv y$ donde cada \equiv puede ser \equiv_P o \equiv_R .

Lema 1.11. Sean P y Q dos particiones equitativas de un grafo G . Entonces $R = P \vee Q$ también es una partición equitativa.

Demostración. Sea $R = \{R_1, \dots, R_r\}$. Es fácil ver que cada R_i puede ser particionado en conjuntos de P o de Q (porque P y Q son refinamientos de R). Sean $x, y \in R_i$. Tenemos que ver que $d(x, R_j) = d(y, R_j)$ para todo j . Como $x \equiv z_1 \equiv z_2 \equiv \dots \equiv z_s \equiv y$ lo único que hay que ver son los casos $x \equiv_P y$ y $x \equiv_Q y$. Sin pérdida de generalidad consideremos $x \equiv_P y$. Como R_j se puede particionar en conjuntos de P , es decir $R_j = P_1 \cup \dots \cup P_p$ (porque P es un refinamiento de R), nos queda que: $d(x, R_j) = d(x, P_1) + \dots + d(x, P_p)$ y $d(y, R_j) = d(y, P_1) + \dots + d(y, P_p)$. Como $x \equiv_P y$ luego cada $d(x, P_i)$ es igual a $d(y, P_i)$. Por lo que resulta que $d(x, R_j) = d(y, R_j)$. \square

Teorema 1.12. Sea G un grafo. Entonces G tiene una única partición equitativa más gruesa.

Demostración. Sean P_1, \dots, P_k la lista de todas las particiones equitativas de G . Esta lista no es vacía dado que vimos que siempre hay una partición equitativa para cualquier G (la de los singletons). Sea $Q = P_1 \vee \dots \vee P_k$. Por el lema anterior y como \vee es asociativa, Q es la única partición equitativa más gruesa. \square

Volviendo a los grafos isomorfos fraccionarios, nos gustaría ver que todos tienen una partición equitativa común. Para ello veamos lo siguiente: dado G un grafo y $P = \{P_1, \dots, P_p\}$ una partición equitativa de $V(G)$ podemos calcular ciertos parámetros de P . Estos parámetros son un par (n, D) donde n es un vector de p componentes indicando el número de vértices de cada P_i y D es una matriz de $p \times p$ donde cada coeficiente ij corresponde al valor $d(x, P_j)$ con $x \in P_i$. Por ejemplo, para los grafos vistos anteriormente y pensando en las particiones en vértices negros y blancos tenemos que $n = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ para ambos grafos.

Si para dos grafos G y H tenemos particiones P y Q tales que los pares (n, D) de ambas particiones coinciden, entonces decimos que P y Q tienen los mismos parámetros. En ese caso, G y H tienen una partición equitativa común (biyección mediante entre los vértices de G y los de H). Si, además, P y Q son las particiones equitativas más gruesas de G y H , entonces decimos que G y H tienen la partición equitativa más gruesa en común.

Los parámetros (n, D) de una partición equitativa $P = \{P_1, \dots, P_p\}$ siguen algunas reglas sencillas. Por una parte, $n_1 + \dots + n_p = v(G)$. Por otra parte, nos queda que $n_i D_{ij} = n_j D_{ji}$. Finalmente, si ordenamos los vértices de G siguiendo el orden de las particiones nos queda que la matriz de adyacencia de G es

$$A(G) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix}$$

donde cada bloque A_{ij} es de tamaño $n_i \times n_j$ y la suma de cada fila de A_{ij} es D_{ij} .

1.5. Secuencias iteradas de grados

Otro concepto para entender el isomorfismo fraccionario es el de las secuencias iteradas de grados de un grafo. Podemos calcular la secuencia de grados de un grafo (y llamarla $d_1(G)$) como el conjunto con multiplicidad $d_1(G) = \{d(v) : v \in V(G)\}$, ordenado en forma no decreciente. También podemos calcular para un vértice v fijo, la secuencia de grados de sus vecinos: $d_1(v) = \{d(w) : w \in N(v)\}$. Para los grafos vistos anteriormente los vértices blancos tienen secuencia de grados $\{3, 3, 4\}$ y los vértices negros tienen secuencia de grados $\{3, 4, 4, 4\}$.

Por otra parte, podemos calcular la secuencia de la secuencia de grados de los vértices de G (y la llamamos $d_2(G)$): $d_2(G) = \{d_1(v) : v \in V(G)\}$ y de la misma manera $d_2(v) = \{d_1(w) : w \in N(v)\}$. Por ejemplo, siempre con los grafos de antes, para los vértices blancos tenemos que $d_2(v) = \{\{3, 3, 4\}, \{3, 3, 4\}, \{3, 4, 4, 4\}\}$ y para los vértices negros tenemos que $d_2(v) = \{\{3, 3, 4\}, \{3, 4, 4, 4\}, \{3, 4, 4, 4\}, \{3, 4, 4, 4\}\}$.

Podemos seguir iterando y definir:

$$\begin{aligned} d_{k+1}(G) &= \{d_k(v) : v \in V(G)\} \\ d_{k+1}(v) &= \{d_k(w) : w \in N(v)\}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos definir la secuencia de grados de un vértice v de G como la lista infinita: $D(v) = [d_1(v), d_2(v), \dots]$ y de la misma forma: $D(G) = [d_1(G), d_2(G), \dots]$.

Es sencillo ver que para los grafos G y H del ejemplo anterior tenemos que $D(G) = D(H)$. Lo que veremos en la próxima sección es justamente el teorema principal sobre isomorfismo fraccionario que nos dice que tener dos grafos G y H isomorfos fraccionarios es equivalente a que estos grafos tengan la misma partición equitativa más gruesa o a que tengan $D(G) = D(H)$.

1.6. El teorema principal sobre isomorfismo fraccionario

Teorema 1.13. *Sean G y H grafos. Son equivalentes:*

- (1) $G \approx_f H$
- (2) G y H tienen en común la partición equitativa más gruesa
- (3) G y H tienen en común alguna partición equitativa
- (4) $D(G) = D(H)$

Demostración. Sean G y H grafos con n vértices, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, y $V(H) = \{w_1, \dots, w_n\}$. Sean A y B sus matrices de adyacencia, respectivamente.

(1) \Rightarrow (3): Supongamos que $G \approx_f H$ y sea S una matriz doble estocástica tal que $AS = SB$. Renombrando los vértices de G y H , podemos suponer que S tiene una estructura de bloques $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_s$ donde cada S_i es indescomponible (y por tanto fuertemente irreducible). La matriz S induce particiones sobre los vértices de G y H : $P_G = \{V_1, \dots, V_s\}$ donde v_i y v_j están en la misma parte de la partición de G si los índices i y j caen en el mismo S_k y de la misma forma definimos P_H . Veamos

que P_G y P_H son particiones equitativas con los mismos parámetros. Particionando A y B en bloques que siguen las particiones P_G y P_H , nos queda:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{ss} \end{bmatrix}$$

y se puede escribir de forma más compacta como: $A_{ij}S_j = S_iB_{ij}$. Trasponiendo $AS = SB$ nos queda que $S^tA = BS^t$ y $S_i^tA_{ij} = B_{ij}S_j^t$. El vector $d_{ij}(G) = A_{ij} \cdot 1$ da el número de aristas de cada vértice en V_i a todos los vértices en V_j . De la misma manera $d_{ij}(H) = B_{ij} \cdot 1$ da el número de aristas de cada vértice en W_i a todos los vértices en W_j . Veamos que $d_{ij}(G) = d_{ij}(H) = c \cdot 1$ para algún entero c :

$$A_{ij}S_j \cdot 1 = S_iB_{ij} \cdot 1 \Rightarrow d_{ij}(G) = S_id_{ij}(H)$$

$$S_i^tA_{ij} \cdot 1 = B_{ij}S_j^t \cdot 1 \Rightarrow S_i^td_{ij}(G) = d_{ij}(H)$$

Aplicando el Teorema 1.8 a los vectores $d_{ij}(G)$ y $d_{ij}(H)$ podemos concluir que $d_{ij}(G) = d_{ij}(H) = c \cdot 1$ como queríamos.

(1) \Rightarrow (2): Vimos que (1) \Rightarrow (3). Más aún, mostramos que los bloques de S inducen una partición equitativa común en los grafos G y H . Usemos esto para ver que (1) \Rightarrow (2). Supongamos que $G \equiv_f H$ y S es doble estocástica con $AS = SB$. Sea P_G la partición equitativa más gruesa de G con parámetros (n, D) . Basta ver que H tiene una partición equitativa con los mismos parámetros. Sea $P_G = \{V_1, \dots, V_r\}$ y supongamos que los primeros n_1 vértices de G están en V_1 y los siguientes n_2 vértices están en V_2 , etc. Sea $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_r$ la matriz doble estocástica donde cada $R_i = \frac{1}{n_i}J_{n_i}$ donde n_i es el número de vértices de V_i y J_{n_i} es la matriz de $n_i \times n_i$ con todos 1 en sus coeficientes. Como P_G es una partición equitativa tenemos que $n_iD_{ij} = n_jD_{ji}$ que se puede escribir como $AR = RA$. Dado que $AS = SB$, nos queda que $ARS = RAS = RSB$.

Veamos que $RS = R$. Sabemos que los bloques indescomponibles de S corresponden a una partición equitativa de G . Así, escribimos $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_r$ donde cada S_k es doble estocástico (pero no necesariamente indescomponible) y tiene las mismas dimensiones que R_k . Entonces $RS = (R_1S_1) \oplus (R_2S_2) \oplus \dots \oplus (R_rS_r)$ y $R_kS_k = R_k$ porque $R_k = \frac{1}{n_k}J_{n_k}$ y S_k es doble estocástica. Dado que $ARS = RSB$, sabemos que $AR = RB$. Por lo que R induce una partición equitativa en H con los mismos parámetros que P_G .

(2) \Rightarrow (3): Trivial.

(3) \Rightarrow (1): Supongamos que G y H tienen particiones equitativas P_G y P_H con los mismos parámetros (n, D) . Sean $P_G = \{V_1, \dots, V_s\}$ y $P_H = \{W_1, \dots, W_s\}$ de forma tal que $|V_i| = |W_i| = n_i$ y de esta forma el número de aristas de un vértice cualquiera de V_i a los vértices de V_j es igual al número de aristas de un vértice cualquiera de W_i a los vértices de W_j y vale D_{ij} . Podemos suponer que los vértices en G están en el orden dado por la partición P_G y lo mismo para H .

Sea $S_i = \frac{1}{n_i}J_{n_i}$ y $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_s$. Calculando

$$AS = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}S_1 & A_{12}S_2 & \dots & A_{1s}S_s \\ A_{21}S_1 & A_{22}S_2 & \dots & A_{2s}S_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1}S_1 & A_{s2}S_2 & \dots & A_{ss}S_s \end{bmatrix}$$

$$\text{y } SB = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1B_{11} & S_1B_{12} & \dots & S_1B_{1s} \\ S_2B_{21} & S_2B_{22} & \dots & S_2B_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_sB_{s1} & S_sB_{s2} & \dots & S_sB_{ss} \end{bmatrix}$$

vemos que éstas coinciden (puesto que $A_{ij}S_j = D_{ij} \cdot J_{n_i}$ y $S_jB_{ji} = D_{ij} \cdot J_{n_i}$).

(3) \Rightarrow (4): Sean $P_G = \{V_1, \dots, V_s\}$ y $P_H = \{W_1, \dots, W_s\}$ particiones equitativas de G y H respectivamente con los mismos parámetros. Queremos ver que $D(G) = D(H)$. Es suficiente mostrar que para todo $v \in V_i$ y para todo $w \in W_i$ tenemos que $D(v) = D(w)$, es decir $d_k(v) = d_k(w)$ para todo k . Podemos mostrarlo por inducción en k . Para $k = 1$ usamos que P_G y P_H son particiones equitativas con los mismos parámetros. Supongamos ahora que $d_{k-1}(v) = d_{k-1}(w)$ para todo $v \in V_i$ y para todo $w \in W_i$. Como $d_k(v) = \{d_{k-1}(x) : x \in N(v)\}$ y $d_k(w) = \{d_{k-1}(y) : y \in N(w)\}$ y el número de vecinos de v y w es el mismo para cada parte apropiada de las particiones, nos queda que $d_k(v) = d_k(w)$.

(4) \Rightarrow (3): Supongamos que $D(G) = D(H)$. Podemos partir G y H poniendo dos vértices en la misma parte de la partición si tienen la misma secuencia iterada de grados. Llamemos a estas particiones P_G y P_H . De la lista $D(v)$ podemos leer cuántos vecinos de cada tipo tiene v . Luego P_G y P_H son particiones equitativas con los mismos parámetros. \square

1.6.1. Algunas consecuencias del teorema principal

Algunas consecuencias interesantes son:

Sean G y H grafos. Son isomorfos fraccionarios cuando las respectivas particiones equitativas más gruesas tienen los mismos parámetros. Por lo que basta encontrar estas particiones y comparar los parámetros.

Si partimos la matriz de adyacencia A de un grafo G siguiendo la partición equitativa más gruesa, nos queda

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix}$$

entonces sabemos que los A_{ij} son matrices con 0 y 1 únicamente donde la suma de cada fila es constante y vale d_{ij} (y de la misma forma, la suma de cada columna es constante y vale d_{ji}). Podemos encontrar todos los grafos isomorfos fraccionarios a G siguiendo estas operaciones: para cada par de índices i, j reemplazamos A_{ij} por otra matriz C_{ij} de las mismas dimensiones y con las mismas sumas en las filas y en las columnas que A_{ij} (y reemplazamos $A_{ji} = A_{ij}^t$ con C_{ij}^t). Esto da una descripción completa de las clases de grafos isomorfos fraccionarios.

Sea $P = \{V_1, \dots, V_p\}$ la partición equitativa más gruesa de G . Para dos vértices cualesquiera x, y en la misma parte de la partición de P el número de caminos de longitud k empezando de x debe igualar al número de caminos de longitud k que comienzan en y . Además, si G es isomorfo fraccionario a H , para todo vértice z ligado a x , el número de caminos de longitud k (en H) debe igualar al número de caminos de longitud k que comienzan en x . Sea $w(k)$ el vector del número de caminos de largo k empezando en los diferentes vértices de G . Notemos que $w(k) = A^k \cdot 1$. Si G es conexo, $A^k \cdot 1$ tiende al autovector correspondiente al máximo autovalor de A (llamémoslo λ). Por tanto, para cada vértice x , el número de caminos de largo k comenzando en x es asintótico a $c\lambda^k$ para alguna constante c positiva. (Si el grafo no es conexo, el número de caminos de largo k que comienzan en un vértice dado crece como λ^k donde λ es el máximo autovalor de la componente del grafo que contiene al vértice dado). Por lo tanto,

Proposición 1.14. *Si $G \approx_f H$ entonces el máximo autovalor de G y H es el mismo.*

Es interesante notar, sin embargo, que dos grafos isomorfos fraccionarios no son necesariamente coespectrales.

Independientemente del teorema principal, el problema de reconocer si dos grafos son fraccionalmente isomorfos es polinomial, ya que la misma definición basada en sus respectivas matrices de adyacencia A y B y la existencia de una matriz doble estocástica S tal que $AS = SB$ se traduce en un problema de programación lineal, que puede resolverse en tiempo polinomial [4]. En contraste, la complejidad computacional del problema de reconocimiento de isomorfismo de grafos continúa, al día de la fecha, abierta.

Capítulo 2

Isomorfismo fraccionario de hipergrafos

2.1. Introducción a los hipergrafos

Un *hipergrafo* G es un par $G = (S, X)$ donde S es un conjunto finito y X es una familia de subconjuntos de S . El conjunto S se llama conjunto de *vértices* del hipergrafo. Los elementos de X son las *hiperaristas* o simplemente *aristas* del hipergrafo. Por ejemplo, un grafo es un caso particular de hipergrafo donde cada elemento de X tiene cardinal 2. (En ese caso, se dice que el hipergrafo es *2-uniforme*). Para un hipergrafo dado, M es la matriz *vértice-arista de incidencia* si tiene n filas (tantas como vértices en el conjunto S) y m columnas (tantas como hiperaristas en el conjunto X) y M_{ij} vale 0 ó 1 según si el vértice i pertenece a la hiperarista j . En particular los grafos (hipergrafos 2-uniformes) pueden ser determinados examinando M : si cada columna tiene sólo dos 1 estamos ante un grafo. Es decir, si $1^t \cdot M = 2$. Por otra parte, es fácil ver que $M \cdot 1 = \delta$ donde δ_i es el grado del vértice i .

Vemos entonces que para un grafo G , tenemos dos tipos de notaciones matriciales, la matriz cuadrada de $n \times n$ (n es el número de vértices de G) de adyacencia y la matriz vértice-arista de $n \times m$ (donde n es como antes y m es el número de aristas) de incidencia.

Hasta ahora, hemos trabajado con las matrices de adyacencia para grafos G y H . Y hemos intentado a partir del concepto de isomorfismo de grafos, una relajación para llegar al concepto de isomorfismo fraccionario de grafos. Una pregunta que podemos hacernos es: ¿cómo se traduce la ecuación matricial $AS = SB$ (donde A y B son las matrices de adyacencia de los grafos G y H y S es una matriz doble estocástica) a una ecuación matricial con M_G y M_H (donde M_G y M_H son las matrices vértice-arista de incidencia)? Veremos con detalle que $G \approx_f H$ (es decir, $AS = SB$) \iff existen S_1 y S_2 matrices doble estocásticas tales que $S_1 M_G = M_H S_2^t$ y $M_G S_2 = S_1^t M_H$.

La razón para pedir estas dos condiciones es la relajación de la condición de que dos hipergrafos sean isomorfos: $PM_G Q = M_H$ donde ahora G y H son dos hipergrafos (no necesariamente 2-uniformes) y P y Q son dos matrices de permutación

de tamaños apropiados. Luego, $PM_G = M_HQ^t$ y $M_GQ = P^tM_H$ (donde usamos que para matrices de permutación P y Q se cumple que $P^t = P^{-1}$ y $Q^t = Q^{-1}$ y también estas últimas son matrices de permutación). Entonces, relajando las matrices de permutación P y Q nos quedan las mismas ecuaciones para matrices doble estocásticas S_1 y S_2 . ¿Por qué es necesario este nuevo enfoque, si podríamos seguir trabajando con las matrices A y B ? Lo interesante de esta otra aproximación para el isomorfismo fraccionario es que ahora puede ser extendido a hipergrafos. En particular, esto nos permitirá calcular algunos invariantes fraccionarios usando programación lineal. También podremos extender el teorema principal de caracterización de los grafos isomorfos fraccionarios a hipergrafos.

Por ahora diremos que dos hipergrafos G y H cumplen que $G \equiv H$ si y sólo si existen S_1 y S_2 matrices doble estocásticas tales que $S_1M_G = M_HS_2^t$ y $M_GS_2 = S_1^tM_H$.

Es evidente que dos matrices M_G y M_H que cumplen con las ecuaciones anteriores tienen las mismas dimensiones (ambas tienen n filas y m columnas).

Proposición 2.1. \equiv es una relación de equivalencia.

Demostración. Veamos que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: $I_1M_G = M_GI_2^t$ y $M_GI_2 = I_1^tM_G$ donde $I_1 = I_1^t$ y $I_2 = I_2^t$ son las matrices identidad de $n \times n$ y $m \times m$ (como siempre n es el número de vértices de G y m es el número de hiperaristas de G).

Simétrica: trivial puesto que llamando a $S_1^t = U_1$ y $S_2^t = U_2$ nos queda que $U_1M_H = M_GU_2$ y $M_HU_2 = U_1^tM_G$.

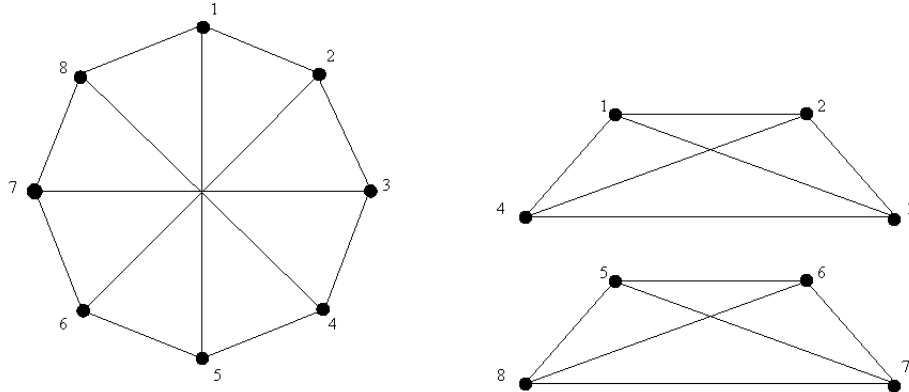
Transitiva: si $S_1M_G = M_HS_2^t$ y $M_GS_2 = S_1^tM_H$ y $S_3M_G = M_KS_4^t$ y $M_GS_4 = S_3^tM_K$ nos queda que $S_1M_GS_4 = M_HS_2^tS_4$ pero también $S_1M_GS_4 = S_1S_3^tM_K$ con lo que $M_HS_2^tS_4 = S_1S_3^tM_K$. De la misma forma, nos queda que $S_3M_GS_2 = S_3S_1^tM_H$ pero también $S_3M_GS_2 = M_KS_4^tS_2$ con lo que $S_3S_1^tM_H = M_KS_4^tS_2$. Llamando $U_1 = S_2^tS_4$ y $U_2 = S_3S_1^t$ nos queda que $M_HU_1 = U_2^tM_K$ y $U_2M_H = M_KU_1^t$. (Recordemos que un producto de matrices doble estocásticas también es una matriz doble estocástica).
□

2.2. Isomorfismo fraccionario de hipergrafos

2.2.1. Ejemplos y casos particulares

Para ver que dos grafos G y H isomorfos fraccionarios también cumplen que $G \equiv H$, trabajaremos primero con algunos ejemplos y casos particulares:

Ejemplo 2.2. G y H como en la figura. Como G y H son ambos 3-regulares de 8 vértices, son isomorfos fraccionarios y pueden ser descriptos por el vector $v = [8]$ y la matriz $D = [3]$.



Calculamos M_G y M_H :

$$M_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definamos $S_1 = \frac{1}{8}J_8 = S_1^t$ y $S_2 = \frac{1}{12}J_{12} = S_2^t$ y calculemos S_1M_G y $M_H S_2^t$:

$$S_1 M_G = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{8} J_{8 \times 12}$$

$$\begin{aligned}
 M_H S_2^t &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{12} J_{8 \times 12}
 \end{aligned}$$

Por lo que $S_1 M_G = M_H S_2^t = \frac{1}{4} J_{8 \times 12}$ y de la misma forma también, $M_G S_2 = S_1^t M_H = \frac{1}{4} J_{8 \times 12}$.

Como en un grafo r -regular hay $\frac{nr}{2}$ aristas, es fácil ver que los cálculos anteriores dan como resultado $\frac{2}{v} J_{v \times a} = \frac{r}{a} J_{v \times a}$. Veámoslo en la siguiente proposición:

Proposición 2.3. *Si los grafos G y H son ambos de n vértices y r -regulares (luego $G \approx_f H$) entonces $G \equiv H$.*

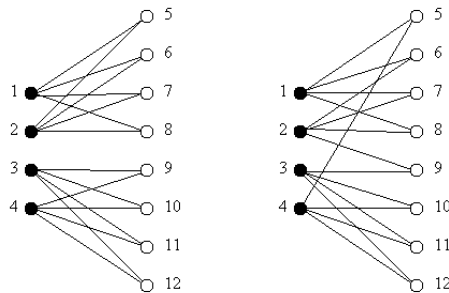
Demostración. Calculemos explícitamente las matrices S_1 y S_2 . Como antes, llamamos J_s a la matriz de $s \times s$ cuyos coeficientes son todos 1 y $J_{s \times t}$ la matriz de $s \times t$ cuyos coeficientes son todos 1. Sean M_G y M_H las matrices vértice-arista de incidencia de los grafos G y H . Entonces las dimensiones de estas matrices son de $n \times a$ donde $a = \frac{nr}{2}$ es el número de aristas de G y también de H . Calculemos $S_1 M_G$ y $M_H S_2^t$ donde $S_1 = S_1^t = \frac{1}{n} J_n$ y $S_2 = S_2^t = \frac{1}{a} J_a$.

$S_1 M_G = \frac{1}{n} J_n M_G = \frac{1}{n} 2 J_{n \times a}$ donde el 2 aparece porque cada columna de M_G suma 2 (tiene únicamente dos 1 en cada columna, los grafos son hipergrafos 2-uniformes).

$M_H S_2^t = M_H \frac{1}{a} J_a = \frac{1}{a} r J_{n \times a}$ donde r aparece porque cada fila de M_H suma r (hay exactamente r unos en cada fila por ser un grafo r -regular).

Pero como $a = \frac{nr}{2}$, entonces $\frac{2}{n} = \frac{r}{a}$ por lo que $S_1 M_G = M_H S_2^t$. De la misma forma, $M_G S_2 = M_G \frac{1}{a} J_a = \frac{1}{a} r J_{n \times a}$ y $S_1^t M_H = \frac{1}{n} J_n M_H = \frac{1}{n} 2 J_{n \times a}$, expresiones que coinciden. \square

Ejemplo 2.4. Sean G y H grafos bipartitos, como en la figura.



uno de los conjuntos de la bipartición tiene n vértices de grado b y el otro m vértices de grado c , por lo tanto, la cantidad de aristas es $a = nb = mc$). Si H es otro grafo con las mismas características (por lo tanto, $G \approx_f H$) entonces $G \equiv H$.

Demostración. Si G y H son como en la proposición, M_G y M_H pueden ser reordenadas de manera tal que las primeras n filas corresponden a los n vértices de una de las componentes del grafo bipartito. En ese sentido, M_G puede ser dividida en 2 matrices de $n \times a$ y $m \times a$ (una debajo de la otra) donde cada una de esas matrices tiene un único 1 por columna y la primer matriz tiene b unos por fila y la segunda tiene c unos por fila. Es decir $M_G = \begin{bmatrix} M_{G,1} \\ M_{G,2} \end{bmatrix}$. Lo mismo con $M_H = \begin{bmatrix} M_{H,1} \\ M_{H,2} \end{bmatrix}$. Nuevamente, calcula-

mos explícitamente las matrices S_1 y S_2 . Sea $S_1 = \frac{1}{n}J_n \oplus \frac{1}{m}J_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}J_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}J_m \end{bmatrix} = S_1^t$ y $S_2 = \frac{1}{a}J_a = S_2^t$. Entonces,

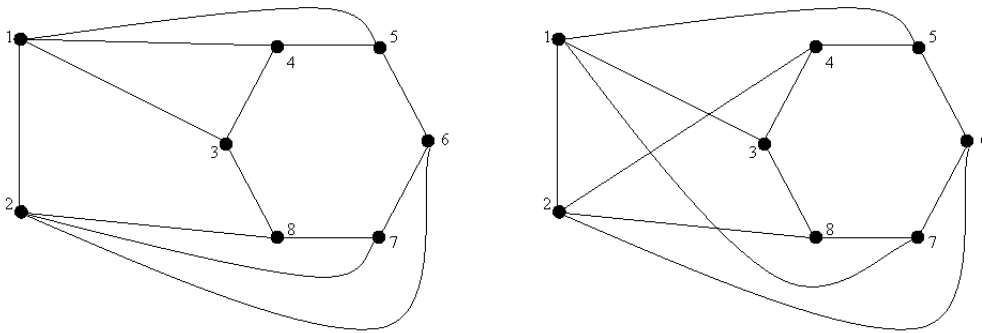
$$S_1 M_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}J_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{G,1} \\ M_{G,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}J_{n \times a} \\ \frac{1}{m}J_{m \times a} \end{bmatrix}$$

$M_H S_2^t = \begin{bmatrix} M_{H,1} \\ M_{H,2} \end{bmatrix} \frac{1}{a}J_a = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} bJ_{n \times a} \\ cJ_{m \times a} \end{bmatrix}$ pero como $\frac{b}{a} = \frac{1}{n}$ y $\frac{c}{a} = \frac{1}{m}$ nos queda que las expresiones anteriores coinciden. De la misma forma

$$M_G S_2 = \begin{bmatrix} M_{G,1} \\ M_{G,2} \end{bmatrix} \frac{1}{a}J_a = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} bJ_{n \times a} \\ cJ_{m \times a} \end{bmatrix} \text{ y } S_1^t M_H = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}J_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{H,1} \\ M_{H,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}J_{n \times a} \\ \frac{1}{m}J_{m \times a} \end{bmatrix}$$

que también coinciden. \square

Ejemplo 2.6. Sean G y H son isomorfos fraccionarios con $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ como muestra la figura.



Calculemos $S_1 M_G$ y $M_H S_2^t$ donde $S_1 = S_1^t = \frac{1}{2}J_2 \oplus \frac{1}{6}J_6$ y $S_2 = S_2^t = \frac{1}{1}J_1 \oplus \frac{1}{4}J_4 \oplus \frac{1}{4}J_4$.
Calculemos $S_1 M_G$ y $M_H S_2^t$:

$$S_1 M_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
M_H S_2^t &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y entonces $S_1 M_G = M_H S_2^t$ y de la misma forma $M_G S_2 = S_1^t M_H$.

Proposición 2.7. *Sea G un grafo con la partición equitativa más gruesa de 2 componentes. Es decir, G puede ser descrito por los siguientes parámetros: $v = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$*

y $D = \begin{bmatrix} r_1 & b \\ c & r_2 \end{bmatrix}$ donde $nb = mc$. Sea H otro grafo con los mismos parámetros, es decir, $G \approx_f H$. Entonces $G \equiv H$.

Demostración. Como antes, definamos explícitamente las matrices doble estocásticas S_1 y S_2 . Sea

$$S_1 = \frac{1}{n} J_n \oplus \frac{1}{m} J_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} J_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} J_m \end{bmatrix} = S_1^t$$

y

$$S_2 = \frac{1}{a_1} J_{a_1} \oplus \frac{1}{a_2} J_{a_2} \oplus \frac{1}{a_3} J_{a_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} J_{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} J_{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} J_{a_3} \end{bmatrix} = S_2^t$$

donde $a_1 = \frac{nr_1}{2}$, $a_2 = \frac{mr_2}{2}$ y $a_3 = nb = mc$ son las cantidades de aristas involucradas. Por tanto, M_G y M_H tienen dimensión $v \times a$ donde $v = n + m$ y $a = a_1 + a_2 + a_3$. Y ambas, reordenándolas, se pueden escribir en bloques:

$M_G = \begin{bmatrix} M_{G,11} & 0 & M_{G,13} \\ 0 & M_{G,22} & M_{G,23} \end{bmatrix}$ donde $M_{G,11}$ (de tamaño $n \times a_1$) corresponde al r_1 -regular de n vértices, $M_{G,22}$ (de tamaño $m \times a_2$) corresponde al r_2 -regular de m vértices y $M_{G,13}$ y $M_{G,23}$ (de tamaños $n \times a_3$ y $m \times a_3$ respectivamente) corresponden

al bipartito (b, c) -regular. Por lo tanto, $M_{G,11} \cdot 1 = r_1$ y $1 \cdot M_{G,11} = 2$ y de la misma forma, $M_{G,22} \cdot 1 = r_2$ y $1 \cdot M_{G,22} = 2$. También, $M_{G,13} \cdot 1 = b$ y $1 \cdot M_{G,13} = 1$ y $M_{G,23} \cdot 1 = c$ y $1 \cdot M_{G,23} = 1$.

Entonces

$$\begin{aligned} S_1 M_G &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} J_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{G,11} & 0 & M_{G,13} \\ 0 & M_{G,22} & M_{G,23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} 2 J_{n \times a_1} & 0 & \frac{1}{n} 1 J_{n \times a_3} \\ 0 & \frac{1}{m} 2 J_{m \times a_2} & \frac{1}{m} 1 J_{m \times a_3} \end{bmatrix} \\ M_H S_2^t &= \begin{bmatrix} M_{H,11} & 0 & M_{H,13} \\ 0 & M_{H,22} & M_{H,23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} J_{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} J_{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} J_{a_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} r_1 J_{n \times a_1} & 0 & \frac{b}{a_3} J_{n \times a_3} \\ 0 & \frac{1}{a_2} r_2 J_{m \times a_2} & \frac{c}{a_3} J_{m \times a_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pero como $\frac{2}{n} = \frac{r_1}{a_1}$, $\frac{2}{m} = \frac{r_2}{a_2}$, $\frac{b}{a_3} = \frac{1}{n}$ y $\frac{c}{a_3} = \frac{1}{m}$ nos queda que las expresiones anteriores coinciden. De la misma forma

$$\begin{aligned} S_1^t M_H &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} J_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{H,11} & 0 & M_{H,13} \\ 0 & M_{H,22} & M_{H,23} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} 2 J_{n \times a_1} & 0 & \frac{1}{n} 1 J_{n \times a_3} \\ 0 & \frac{1}{m} 2 J_{m \times a_2} & \frac{1}{m} 1 J_{m \times a_3} \end{bmatrix} \\ \text{y } M_G S_2 &= \begin{bmatrix} M_{G,11} & 0 & M_{G,13} \\ 0 & M_{G,22} & M_{G,23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} J_{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} J_{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} J_{a_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} r_1 J_{n \times a_1} & 0 & \frac{b}{a_3} J_{n \times a_3} \\ 0 & \frac{1}{a_2} r_2 J_{m \times a_2} & \frac{c}{a_3} J_{m \times a_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

son iguales. \square

2.2.2. Caso general

Veamos ahora que si dos grafos G y H son isomorfos fraccionarios ($G \approx_f H$) entonces $G \equiv H$ (vistos como hipergrafos 2-uniformes), usando la proposición anterior y generalizándola.

Si $G \approx_f H$, ambos grafos tiene la misma partición equitativa más gruesa y por tanto pueden ser descriptos por los parámetros v y D donde v es un vector de k números correspondientes a las k partes de la partición del grafo y D es una matriz de $k \times k$ cuyos coeficientes corresponden a los distintos grados de conexión entre componentes. Además, permutando filas y columnas, M_G de $v \times a$ nos queda dividida en $k \times t$ bloques (donde $t = \binom{k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$ es la cantidad de particiones de las aristas considerando que hay k bloques). Para las primeras k columnas, tendremos 0 fuera de la diagonal y los k bloques (en la diagonal) $M_{G,ii}$ corresponden a las k componentes regulares y por tanto $M_{G,ii} \cdot 1 = D_{ii}$ y $1 \cdot M_{G,ii} = 2$. Además, en las

siguientes columnas, los bloques cumplen con $M_{G,ij} \cdot 1 = \begin{cases} 0 \\ D_{is} \end{cases}$ y $1 \cdot M_{G,ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ donde j es indexado por s . Luego, llamamos $S_1 = \frac{1}{v_1} J_{v_1} \oplus \dots \oplus \frac{1}{v_k} J_{v_k}$ (luego $S_1 = S_1^t$) y llamamos $S_2 = \frac{1}{a_1} J_{a_1} \oplus \dots \oplus \frac{1}{a_t} J_{a_t}$ (luego $S_2 = S_2^t$). Entonces

$$S_1 M_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{v_1} J_{v_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_2} J_{v_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_3} J_{v_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{v_{k-1}} J_{v_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{v_k} J_{v_k} \end{bmatrix} \bullet$$

$$\begin{bmatrix} M_{G,11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & M_{G,1(k+1)} & M_{G,1(k+2)} & \dots & 0 \\ 0 & M_{G,22} & 0 & \dots & 0 & 0 & M_{G,2(k+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_{G,33} & \dots & 0 & 0 & 0 & M_{G,3(k+2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{g,(k-1)(k-1)} & \dots & 0 & 0 & \dots & M_{G,(k-1)t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{G,kk} & 0 & 0 & \dots & M_{G,kt} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{v_1} J_{v_1 \times a_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{v_1} J_{v_1 \times a_{k+1}} & \frac{1}{v_1} J_{v_1 \times a_{k+2}} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{v_2} J_{v_2 \times a_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{v_2} J_{v_2 \times a_{k+1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{v_3} J_{v_3 \times a_3} & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v_3} J_{v_3 \times a_{k+2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2}{v_{k-1}} J_{v_{k-1} \times a_{k-1}} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{v_{k-1}} J_{v_{k-1} \times a_t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{2}{v_k} J_{v_k \times a_k} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{v_k} J_{v_k \times a_t} \end{bmatrix}$$

$$M_H S_2^t = \begin{bmatrix} M_{G,11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & M_{G,1(k+1)} & M_{G,1(k+2)} & \dots & 0 \\ 0 & M_{G,22} & 0 & \dots & 0 & 0 & M_{G,2(k+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_{G,33} & \dots & 0 & 0 & 0 & M_{G,3(k+2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{g,(k-1)(k-1)} & \dots & 0 & 0 & \dots & M_{G,(k-1)t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{G,kk} & 0 & 0 & \dots & M_{G,kt} \end{bmatrix} \bullet$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} J_{a_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} J_{a_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} J_{a_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{t-1}} J_{a_{t-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_t} J_{a_t} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{D_{11}}{a_1} J_{v_1 \times a_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{D_{12}}{a_{k+1}} J_{v_1 \times a_{k+1}} & \frac{D_{13}}{a_{k+2}} J_{v_1 \times a_{k+2}} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{D_{22}}{a_2} J_{v_2 \times a_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{D_{21}}{a_{k+1}} J_{v_2 \times a_{k+1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_{33}}{a_3} J_{v_3 \times a_3} & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{D_{31}}{a_{k+2}} J_{v_3 \times a_{k+2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{D_{(k-1)(k-1)}}{a_{k-1}} J_{v_{k-1} \times a_{k-1}} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{D_{(k-1)k}}{a_t} J_{v_{k-1} \times a_t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{D_{kk}}{a_k} J_{v_k \times a_k} & 0 & 0 & \dots & \frac{D_{k(k-1)}}{a_t} J_{v_k \times a_t} \end{bmatrix}$$

y $S_1 M_G = M_H S_2^t$ puesto que $\frac{2}{v_i} = \frac{D_{ii}}{a_i}$ para $1 \leq i \leq k$ y $\frac{1}{v_i} = \frac{D_{ij}}{a_s}$ y $\frac{1}{v_j} = \frac{D_{ji}}{a_s}$ donde s indexa a las aristas que unen la partición i con la partición j . De la misma forma queda que $S_1^t M_H = M_G S_2$.

Veamos ahora que si dos hipergrafos G y H son grafos (hipergrafos 2-uniformes) y $G \equiv H$ entonces $G \approx_f H$. Para ello, usaremos las mismas ideas que en el teorema principal de isomorfismo fraccionario.

Teorema 2.8. *Si $G \equiv H$ y G y H son grafos (hipergrafos 2-uniformes) entonces $G \approx_f H$.*

Demostración. Sabemos que $S_1M_G = M_H S_2^t$ y $M_G S_2 = S_1^t M_H$. Se puede asumir que S_1 y S_2 tienen estructura de bloques, es decir $S_1 = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ y $S_2 = B_1 \oplus \dots \oplus B_a$ donde cada A_i y cada B_i son indescomponibles y por tanto fuertemente irreducibles. Veamos que realmente es así. Si $PS_1Q = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ con P y Q permutaciones y $RS_2T = B_1 \oplus \dots \oplus B_a$ con R y T permutaciones, podemos escribir:

$$PS_1M_GR^t = PM_H S_2^t R^t$$

entonces

$$(PS_1Q)(Q^t M_G R^t) = (PM_H T)(T^t S_2^t R^t)$$

pero al mismo tiempo, tenemos que (por la otra ecuación):

$$Q^t M_G S_2 T = Q^t S_1^t M_H T$$

y entonces

$$(Q^t M_G R^t)(RS_2 T) = (Q^t S_1^t P^t)(PM_H T).$$

Es decir, al intercambiar filas y columnas de S_1 y S_2 para llevarlas a una estructura de bloques, nos queda que M_G y M_H también intercambian filas y columnas según las siguientes fórmulas: $M'_G = Q^t M_G R^t$ y $M'_H = PM_H T$. Y llamaremos M_G y M_H a estas nuevas M'_G y M'_H .

Escribamos las condiciones $S_1M_G = M_H S_2^t$ y $M_G S_2 = S_1^t M_H$.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1a} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{k1} & G_{k2} & \dots & G_{ka} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1a} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{k1} & H_{k2} & \dots & H_{ka} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2^t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_a^t \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1a} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{k1} & G_{k2} & \dots & G_{ka} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_a \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} A_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1a} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{k1} & H_{k2} & \dots & H_{ka} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego $A_i G_{ij} = H_{ij} B_j^t$ y $G_{ij} B_j = A_i^t H_{ij}$. Llamando $d_{ij}(G) = G_{ij} \cdot 1$ y $d_{ij}(H) = H_{ij} \cdot 1$ calculamos $A_i G_{ij} \cdot 1 = H_{ij} B_j^t \cdot 1 = H_{ij} \cdot 1$.

Entonces $A_i d_{ij}(G) = d_{ij}(H)$ y como $G_{ij} \cdot 1 = G_{ij} B_j \cdot 1 = A_i^t H_{ij} \cdot 1$ nos queda que $d_{ij}(G) = A_i^t d_{ij}(H)$. Pero usando el Teorema 1.8 nuevamente tenemos que $d_{ij}(G) = d_{ij}(H) = c \cdot 1$. Por otra parte, llamando $d'_{ij}(G) = 1^t \cdot G_{ij}$ y $d'_{ij}(H) = 1^t \cdot H_{ij}$, nos queda que $d'_{ij}(G) = 1^t G_{ij} = 1^t A_{ij} G_{ij} = 1^t H_{ij} B_j^t = d'_{ij}(H) B_j^t$ y $d''_{ij}(G) B_j =$

$1^t G_{ij} B_j = 1^t A_i^t H_{ij} = 1^t H_{ij} = d''_{ij}(H)$. Usando nuevamente el Teorema 1.8 pero para $d'_{ij}(G)$ y $d''_{ij}(H)$ nos queda que $d_{ij}(G) = d_{ij}(H) = e \cdot 1^t$. Luego, nos queda que para hipergrafos 2-uniformes, este último valor e puede ser 0, 1 ó 2 únicamente. Así, las matrices M_G y M_H quedan divididas en bloques G_{ij} y H_{ij} de las mismas dimensiones donde cada fila suma lo mismo y cada columna suma lo mismo (que puede ser únicamente 2, 1 o 0). Pero como las columnas de M_G y M_H suman 2 en cada columna, nos quedan los siguientes casos: si la suma de las columnas de G_{ij} (y por tanto también de H_{ij}) suman 2, estamos ante los vértices de las clases regulares, si la suma de las columnas de G_{ij} suman 0 es por lo tanto que G_{ij} es una matriz nula (y también H_{ij}) y si las columnas de G_{ij} suman 1, habrá otra G_{kj} donde la suma también de 1, entonces estamos ante las conexiones de la clase i a la clase k (y lo mismo pasa con H_{ij}). Por tanto S_1 y S_2 inducen una división de los vértices y aristas de G y H , que hacen que $G \approx_f H$. \square

Como hemos demostrado que para dos grafos G y H , $G \approx_f H$ entonces $G \equiv H$ y $G \equiv H$ entonces $G \approx_f H$, de ahora en más utilizaremos únicamente la notación $G \approx_f H$ para $G \equiv H$. Es decir, que el concepto de isomorfismo fraccionario, puede ser extendido a hipergrafos. Diremos que *dos hipergrafos son isomorfos fraccionarios* si $G \equiv H$ y lo escribiremos $G \approx_f H$.

Cabe destacar que, tal como en el caso de los grafos, las condiciones que definen que dos hipergrafos sean isomorfos fraccionarios pueden ser verificadas mediante la factibilidad de un modelo de programación lineal de tamaño polinomial en el tamaño de los hipergrafos: $G \approx_f H$ si y sólo si existen S_1 y S_2 matrices doble estocásticas tales que $S_1 M_G = M_H S_2^t$ y $M_G S_2 = S_1^t M_H$. Por lo tanto el reconocimiento de isomorfismo fraccionario en hipergrafos es polinomial.

2.2.3. Un ejemplo final

Es interesante notar que la demostración última, caracteriza también los hipergrafos isomorfos fraccionarios: dos hipergrafos G y H son isomorfos fraccionarios si se pueden partir sus vértices en clases (es decir, hipergrafos inducidos) de forma tal que cada clase (un hipergrafo) sea regular y uniforme con los mismos parámetros en G y H y que las hiperaristas que unen clases entre sí, también tengan los mismos parámetros en G y en H .

Ejemplos:

$$M_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} y$$
$$M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 3

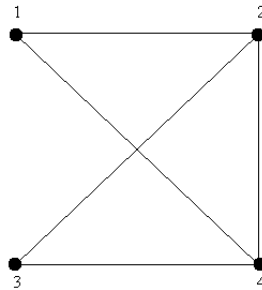
Grafos de línea

3.1. Introducción

Es interesante notar que, cuando G es un grafo, de la matriz de incidencia M_G se puede obtener fácilmente la matriz de adyacencia del grafo G :

$A = M_G \cdot M_G^t$ es una matriz de $v \times v$ (donde v es la cantidad de vértices de G) y A_{ii} es el grado del vértice i y A_{ij} , si $i \neq j$, vale 0 ó 1 según si hay una arista uniendo al vértice i con el vértice j .

Ejemplo 3.1. G como en la figura.



$$\text{Entonces } M_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$A = M_G \cdot M_G^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

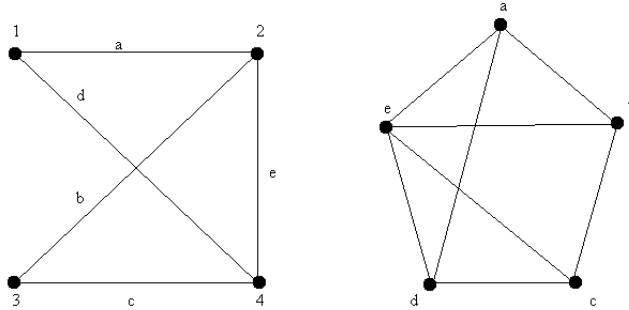
Veamos si podemos mostrar de otra forma que para grafos si $G \equiv H$ entonces $G \approx_f H$:

Si $G \equiv H$ (y G y H son hipergrafos 2-uniformes, es decir grafos) luego existen S_1 y S_2 doble estocásticas tales que $S_1 M_G = M_H S_2^t$ y $M_G S_2 = S_1^t M_H$. Trasponiendo la

segunda expresión queda que $S_2^t M_G^t = M_H^t S_1$ y multiplicando la primera expresión por M_G^t a izquierda nos queda que $S_1 M_G M_G^t = M_H S_2^t M_G^t = M_H M_H^t S_1$. Además $S_1 M_G \cdot 1 = M_H S_2^t \cdot 1 = M_H \cdot 1$ y $M_G S_2 \cdot 1 = S_1^t M_H \cdot 1$ y llamando $\delta_G = M_G \cdot 1$ al vector de los grados de G y $\delta_H = M_H \cdot 1$ al vector de los grados H , nos queda que $S_1 \delta_G = \delta_H$ y $S_1^t \delta_H = \delta_G$. Usando el Teorema 1.8 nos queda entonces que δ_G y δ_H son uno una permutación del otro, es decir G y H tienen la misma secuencia de grados. Entonces reordenando M_G y M_H nos queda que $M_G M_G^t = A + I_G$ y $M_H M_H^t = B + I_H$ donde A y B son las matrices de adyacencia de G y H respectivamente y $I_G = I_H$ es la matriz diagonal con los grados de los vértices de G y H respectivamente. Luego $S_1^*(A + I_G) = (B + I_H)S_1^*$, entonces $S_1^* A = B S_1^*$ y por lo tanto $G \approx_f H$ (donde S_1^* es la correspondiente permutación de S_1 luego de reordenar M_G y M_H).

Por otra parte, ¿qué obtenemos si calculamos $L = M_G^t M_G$? Vemos que la dimensión de L es de $a \times a$ (donde a es la cantidad de aristas del grafo G). Los coeficientes de la diagonal L_{ii} van a ser siempre 2 y los coeficientes fuera de la diagonal L_{ij} van a ser 0 ó 1, dependiendo de si hay un vértice que une a la arista i con la arista j . Es decir, $L - 2I$ es la matriz de adyacencia del *grafo de línea* de G que llamaremos $L(G)$.

Ejemplo 3.2. Con el mismo grafo que antes,



$$L = M_G^t M_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El teorema de Whitney (1932) [8] dice que si G y H son grafos conexos y $L(G)$ es isomorfo a $L(H)$ entonces G es isomorfo a H (salvo el caso $G = K_3$ y $H = K_{1,3}$). Podríamos preguntarnos si existe un análogo para el isomorfismo fraccionario:

Dados G y H dos grafos, ¿es cierto que $G \approx_f H$ entonces $L(G) \approx_f L(H)$? ¿Y es cierto que si $L(G) \approx_f L(H)$ entonces $G \approx_f H$? Veremos que lo primero es cierto mientras que el caso general para la segunda proposición es falso.

3.2. La versión fraccionaria del Teorema de Whitney

Proposición 3.3. Sean G y H dos grafos con $G \approx_f H$. Entonces $L(G) \approx_f L(H)$.

Demostración. Si $G \approx_f H$ entonces existen S_1 y S_2 doble estocásticas tales que $S_1 M_G = M_H S_2^t$ y $M_G S_2 = S_1^t M_H$. Trasponiendo la primera expresión nos queda que $M_G^t S_1^t = S_2 M_H^t$ y multiplicando la segunda expresión a izquierda por M_G^t nos queda que

$$M_G^t M_G S_2 = M_G^t S_1^t M_H = S_2 M_H^t M_H$$

y restando $2S_2$ nos queda que

$$(M_G^t M_G - 2I)S_2 = S_2(M_H^t M_H - 2I).$$

Pero $M_G^t M_G - 2I$ y $M_H^t M_H - 2I$ son las matrices de adyacencia de $L(G)$ y $L(H)$. Luego $L(G) \approx_f L(H)$. \square

3.2.1. Ejemplos y casos particulares

Calculemos explícitamente la matriz $D_{L(G)}$ conociendo la matriz de adyacencia de G para algunos casos:

Ejemplo 3.4. Si G es un grafo 3-regular de 6 vértices podemos calcular su grafo de línea que tendrá $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ vértices y será 4-regular donde 4 se calcula viendo que cada arista de G está conectada a 2 aristas por extremo.

En general, si G es un grafo r -regular de n vértices entonces $L(G)$ es un grafo s -regular de m vértices con $s = 2r - 2$ y $m = \frac{nr}{2}$. Luego si describimos el grafo G por el vector $v_G = [n]$ y por la matriz $D_G = [r]$, nos queda que $v_{L(G)} = [\frac{nr}{2}]$ y $D_{L(G)} = [2r - 2]$.

Ejemplo 3.5. Si G es un grafo $(3, 2)$ -regular bipartito de 4 y 6 vértices por parte, entonces $L(G)$ es un grafo 3-regular de $3 \cdot 4 = 6 \cdot 2 = 12$ vértices que es 3-regular porque cada arista de G está conectada a 2 aristas en un extremo y a 1 arista en el otro extremo.

En general, si G es un grafo (b, c) -regular bipartito de n y m vértices por parte, entonces $L(G)$ es un grafo s -regular de k vértices donde $s = b + c - 2$ y $k = bn = cm$. Es decir, si describimos el grafo G por el vector $v_G = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ y por la matriz $D = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, nos queda que $v_{L(G)} = [bn = cm]$ y $D_{L(G)} = [b + c - 2]$.

Ejemplo 3.6. Si G es un grafo descrito por el vector $v_G = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ y la matriz $D_G = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, el grafo de línea de G está descrito por el vector $v_{L(G)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$ y la matriz

$D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Aparecen 3 componentes en $L(G)$ porque hay 2 componentes en G y tres tipos de aristas diferentes en G : las aristas del 3-regular, las aristas del 2-regular y las aristas que unen el 3-regular con el 2-regular.

Si G es un grafo descrito por el vector $v_G = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ y por la matriz $D_G = \begin{bmatrix} r_1 & b \\ c & r_2 \end{bmatrix}$ entonces $L(G)$ puede ser descrito por el vector $v_{L(G)} = \begin{bmatrix} \frac{nr_1}{2} \\ \frac{nr_2}{2} \\ bn = cm \end{bmatrix}$ y por la matriz

$D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 2r_1 - 2 & 0 & 2b \\ 0 & 2r_2 - 2 & 2c \\ r_1 & r_2 & b + c - 2 \end{bmatrix}$ donde pedimos que r_1, r_2, b y c no sean 0.

Es importante notar que, en principio, no sabemos si esta matriz $D_{L(G)}$ es reducible o no; en el sentido de que puede pasar que no corresponda a la partición más gruesa. Sin embargo, (ver más adelante) para que una partición sea reducible a una más gruesa, tiene que haber dos filas i y j en D tales $D_{ij} + D_{ii} = D_{ji} + D_{jj}$ y $D_{ik} = D_{jk}$ con $k \neq i, j$. Mirando $D_{L(G)}$ vemos que esto pasaría únicamente con las filas 1 y 2 si $r_1 = r_2$ y $b = c$ pero en ese caso, $D_G = \begin{bmatrix} r_1 + b & b \\ c & r_2 + c \end{bmatrix}$ y estamos suponiendo que D_G dada como matriz de 2×2 no es reducible a una matriz de 1×1 .

¿Qué pasa si, en cambio, r_1 y r_2 son ambas 0?

Estamos ante el segundo ejemplo de un grafo bipartito G : nos queda un grafo regular $L(G)$, es decir que la matriz $D_{L(G)}$ se reduce a un único coeficiente.

¿Qué pasa si $r_1 \neq 0$ y $r_2 = 0$?

Entonces $v_{L(G)} = \begin{bmatrix} \frac{nr_1}{2} \\ bn = cm \end{bmatrix}$ y $D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 2r_1 - 2 & 2b \\ r_1 & b + c - 2 \end{bmatrix}$.

¿Qué pasa si $b = c = 0$?

Entonces $v_{L(G)} = \begin{bmatrix} \frac{nr_1}{2} \\ \frac{nr_2}{2} \end{bmatrix}$ y $D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 2r_1 - 2 & 0 \\ 0 & 2r_2 - 2 \end{bmatrix}$.

3.2.2. Algunas consideraciones sobre la reducibilidad de las particiones

En principio, al calcular $D_{L(G)}$ no podemos saber, sin inspeccionarla, si estamos ante la partición más gruesa del grafo de línea o no. Decimos que la matriz $D_{L(G)}$ calculada es irreducible si sus parámetros corresponden a la partición más gruesa. En caso de no ser así, es porque existe una cierta cantidad de filas que pueden ser unidas y forman una única partición dentro de $L(G)$. En el caso de que sean dos las filas a unir, nos queda que estas filas (supongamos que sean la i y la j) deben cumplir con las siguientes condiciones:

$$a = D_{ii} + D_{ij} = D_{ji} + D_{jj}$$

$$g_l = D_{il} = D_{jl} \text{ para todo } l \neq i, j$$

La primera condición me indica que uniré la partición i con la j y me quedará un a -regular donde $a = D_{ij} + D_{ii} = D_{ji} + D_{jj}$. Y la segunda condición me indica que este a -regular tendrá conexiones con las otras particiones con parámetros $g_l = D_{il} = D_{jl}$. Veámoslo con un ejemplo:

$$v_{L(G)} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 30 \\ 120 \end{bmatrix} \text{ y } D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \\ 6 & 14 & 5 & 28 \\ 4 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}. \text{ Las filas 2 y 4 cumplen con las con-}$$

diciones, luego las unimos y la partición más gruesa tiene los siguientes parámetros:

$$v_{L(G)} = \begin{bmatrix} 60 \\ 180 = 60 + 120 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ y } D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 4 & 7 = 5 + 2 = 4 + 3 & 7 \\ 6 & 42 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, también es posible que se puedan unir tres filas, sin que necesariamente podamos unir primero dos y luego estas dos con la restante. Para unir tres filas (supongamos que son la i , j y k), las condiciones a cumplir son:

$$a = D_{ii} + D_{ij} + D_{ik} = D_{ji} + D_{jj} + D_{jk} = D_{ki} + D_{kj} + D_{kk}$$

$$g_l = D_{il} = D_{jl} = D_{kl} \text{ para todo } l \neq i, j, k$$

Nuevamente, la primera condición me indica que uniré las particiones i , j y k quedando un a -regular con $a = D_{ii} + D_{ij} + D_{ik} = D_{ji} + D_{jj} + D_{jk} = D_{ki} + D_{kj} + D_{kk}$. Y la segunda condición me indica que este a -regular tendrá conexiones con las otras particiones con grados $g_l = D_{il} = D_{jl} = D_{kl}$. Veámoslo con otro ejemplo:

$$v_{L(G)} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} \text{ y } D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}. \text{ Las filas 1, 2 y 3 cumplen con las con-}$$

diciones, luego las unimos y la partición más gruesa tiene los siguientes parámetros:

$$v_{L(G)} = \begin{bmatrix} 70 = 20 + 20 + 30 \\ 60 \end{bmatrix} \text{ y } D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 8 = 4 + 1 + 3 = 1 + 1 + 6 = 2 + 4 + 2 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Es importante notar que en la matriz $D_{L(G)}$ reducible no se pueden tomar sólo dos filas (por ejemplo la 1 y la 2) y reducirlas y luego a esta fila reducirla con la tercera.

De la misma forma, es posible que una cierta matriz $D_{L(G)}$ sea reducible uniendo cuatro o más particiones. Las condiciones generales para unir s filas i_1, i_2, \dots, i_s son:

$$a = \sum D_{i_1 i_j} = \sum D_{i_2 i_j} = \dots = \sum D_{i_s i_j}$$

$$g_l = D_{i_1 l} = D_{i_2 l} = \dots = D_{i_s l} \text{ para todo } l \neq i_1, i_2, \dots, i_s$$

Nos quedará así un a -regular con conexiones a las otras particiones con parámetros g_l .

Sin embargo, esto no agota todos los casos posibles. Supongamos por ejemplo

$$\text{que tenemos una matriz } D_G = \begin{bmatrix} r_1 & b_{12} & b_{13} \\ c_{12} & r_2 & b_{23} \\ c_{13} & c_{23} & r_3 \end{bmatrix} \text{ y esta matriz ya es reducible en las}$$

filas 1 y 2 ¿Qué pasa si calculamos $D_{L(G)}$ sin reducir antes D_G ? Nos quedará que $D_{L(G)}$ tiene 6 filas pero las filas 1,2 y 4 pueden ser unidas para formar una única componente (llamamémosla R) sólo si también unimos las filas 5 y 6 para formar otra componente que corresponde a las conexiones entre R y r_3 . Es decir, nos quedan tres componentes (R , r_3 y las conexiones entre R y r_3) como hubiera pasado si en el comienzo hubiéramos reducido D_G a dos componentes únicamente. Esto muestra que las ecuaciones anteriores no agotan las posibles formas de reducir la matriz $D_{L(G)}$. La forma más general de reducir una matriz $D_{L(G)}$ es uniendo las distintas particiones en particiones más grandes todas al mismo tiempo.

En general, si G es un grafo descrito por un vector $v_G = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \dots \\ n_k \end{bmatrix}$ y por la matriz

$$D_G = \begin{bmatrix} r_1 & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ c_{12} & r_2 & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1k} & c_{2k} & \dots & r_k \end{bmatrix} \text{ y } D_G > 0 \text{ entonces nos queda al calcular el grafo de línea}$$

$$t = \frac{(k+1)k}{2} = k + \binom{k}{2} \text{ componentes. Es decir, } v_{G(L)} = \begin{bmatrix} \frac{n_1 r_1}{2} \\ \dots \\ \frac{n_k r_k}{2} \\ b_{12} n_1 = c_{12} n_2 \\ \dots \\ b_{(k-1)k} n_{k-1} = c_{(k-1)k} n_k \end{bmatrix}$$

y $D_{L(G)} =$

$$\begin{bmatrix} 2r_1 - 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2b_{12} & 2b_{13} & \dots & 0 \\ 0 & 2r_2 - 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2r_3 - 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2c_{13} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2r_{k-1} - 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2b_{(k-1)k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 2r_k - 2 & 0 & 0 & \dots & 2c_{(k-1)k} \\ r_1 & r_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{12} + c_{12} - 2 & b_{13} & \dots & 0 \\ r_1 & 0 & r_3 & \dots & 0 & 0 & b_{12} & b_{13} + c_{13} - 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{k-1} & r_k & 0 & 0 & \dots & b_{(k-1)k} + c_{(k-1)k} - 2 \end{bmatrix}$$

donde estamos suponiendo que los coeficientes de D_G son todos positivos y que $v_{G(L)}$ y $D_{G(L)}$ no tienen necesariamente que corresponder a la partición más gruesa.

Es importante notar que pedir que $D_G > 0$ nos va a garantizar que la matriz $D_{L(G)}$ tenga exactamente $t = \frac{(k+1)k}{2}$ filas y columnas. Conjeturamos que lo que verdaderamente va a garantizar que $D_{L(G)}$ sea irreducible (suponiendo que existen algunos $b_{ij} = c_{ij} = 0$ y por tanto la matriz $D_{L(G)}$ tiene menos de $t = \frac{(k+1)k}{2}$ filas y columnas) es que los $r_i \neq 0 \forall i$. Es decir, dado $D_{L(G)}$ y $v_{L(G)}$ y sabiendo que las particiones regulares de G no son 0-regulares, entonces podemos calcular D_G y v_G , lo que nos mostraría que si G y H son grafos y sus matrices irreducibles D_G y D_H tienen la diagonal sin ceros, si $L(G) \approx_f L(H)$ entonces $G \approx_f H$. La condición de que D_G no tenga ceros en la diagonal es equivalente a que en su partición equitativa

más gruesa ninguna de las partes sea un conjunto independiente.

Ejemplo 3.7. Calculemos D_G y v_G (con G como antes) si

$$v_{L(G)} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 72 \\ 48 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ y } D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 12 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 2 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 16 & 4 \end{bmatrix}.$$

Decidamos cuáles columnas corresponden a los r_i y cuales a los b_{ij} , c_{ij} . Vemos que las columnas 1, 3, 4 y 7 tienen dos números distintos de 0 que corresponderían a $2r_i - 2$ y a r_i . Sin embargo, no es posible calcular r_i para la columna 3 por lo que la descartamos. Por otra parte, la columna 2 corresponde a un $r_i = 2$ que no tiene en G aristas con otras componentes regulares. Por lo que, las columnas 1,2,4 y 7 corresponden a los r_i y las restantes columnas corresponden a las aristas entre componentes regulares en G .

$$\text{Luego, reordenando, } D_{L(G)} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 16 & 16 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \text{ y } v_{L(G)} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 12 \\ 9 \\ 12 \\ 72 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Entonces nos queda que } D_G \text{ es de } 4 \times 4 \text{ y } D_G = \begin{bmatrix} 5 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ c_{12} & 2 & b_{23} & b_{24} \\ c_{13} & c_{23} & 2 & b_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & 3 \end{bmatrix}.$$

Además, mirando las filas 5, 6 y 7, podemos ver que la fila 5 (y por tanto la columna 5 también) corresponden a las aristas que unen la componente 1 con la 4, luego mirando la columna 5 nos queda que $2b_{14} = 4$ y $2c_{14} = 4$ entonces $b_{14} = 2$ y $c_{14} = 2$. De la misma manera, la fila 6 (y la columna 6) corresponden a las aristas que unen la componente 3 con la componente 4 en G . Entonces, de la fila 6 obtenemos que $2b_{34} = 8$ y $2c_{34} = 4$ ($b_{34} = 4$ y $c_{34} = 2$). Finalmente, la fila 7 (y la columna 7) corresponden a las aristas que unen la componente 1 con la componente 3 en G . Por lo que $2b_{13} = 24$ y $2c_{13} = 12$ ($b_{13} = 12$ y $c_{13} = 6$). Por otra parte, la componente 2 no está conectada a ninguna otra componente, lo que implica que

$$b_{12} = b_{23} = b_{24} = c_{12} = c_{23} = c_{24} = 0. \text{ Nos queda así: } D_G = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}. \text{ Para}$$

calcular v_G usamos D_G y los valores de $v_{L(G)} = \begin{bmatrix} 15 = \frac{5n_1}{2} \\ 12 = \frac{2n_2}{2} \\ 12 = \frac{2n_3}{2} \\ 9 = \frac{3n_4}{2} \\ 12 \\ 72 \\ 48 \end{bmatrix}$. Luego, $v_G = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$.

3.3. Algunos contraejemplos al Teorema de Whitney en su versión fraccionaria

¿Es cierto el caso general de $L(G) \approx_f L(H)$ entonces $G \approx_f H$? ¡No! Veamos algunos contraejemplos (donde justamente, tenemos ceros en las diagonales de G o de H):

Ejemplo 3.8. Si G y H son grafos bipartitos, con G $(3, 4)$ -regular bipartito con 20 y 15 vértices en cada parte y H es $(5, 2)$ -regular bipartito con 12 y 30 vértices en cada parte, nos queda que G y H no son isomorfos fraccionarios pero sus grafos de línea son ambos 5-regulares con 60 vértices. Luego, $L(G) \approx_f L(H)$. Matricialmente, $v_G = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix}$ y $D_G = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ y $v_H = \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \end{bmatrix}$ y $D_H = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. En particular, no podemos aplicar el resultado anterior porque $r_1 = r_2 = 0$ y así queda que $v_{L(G)} = v_{L(H)} = [60]$ y $D_{L(G)} = D_{L(H)} = [5]$.

Ejemplo 3.9. De la misma forma, si G es un grafo $(2, 4)$ -regular bipartito con 6 y 3 vértices en cada partición y H un grafo 3-regular con 8 vértices. Nos queda que $L(G) \approx_f L(H)$. Matricialmente, $v_G = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $D_G = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ y $v_H = [8]$ y $D_H = [3]$. Entonces, $D_{L(G)} = D_{L(H)} = [4]$ con $v_{L(G)} = v_{L(H)} = [12]$. Vemos que aunque H cumple con la condición de que la diagonal de D_H sea positiva, G no cumple con la misma condición.

Ejemplo 3.10. En general, sean G y H son grafos bipartitos con $v_G = \begin{bmatrix} n_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$, $D_G = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}$, $v_H = \begin{bmatrix} n_2 \\ m_2 \end{bmatrix}$ y $D_H = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}$. Si, como en los ejemplos anteriores, vale que $b_1 + c_1 = b_2 + c_2$ y $n_1 b_1 = n_2 b_2$ entonces $v_{L(G)} = v_{L(H)} = [n_1 b_1]$ y $D_{L(G)} = D_{L(H)} = [b_1 + c_1 - 2]$ por lo que $L(G) \approx_f L(H)$ aún cuando G y H pueden no ser isomorfos fraccionarios. Además, si F es un grafo $\frac{b_1 + c_1}{2}$ -regular de s vértices con $\frac{s(b_1 + c_1)}{4} = n_1 b_1$, también queda que $v_{L(F)} = [n_1 b_1]$ y $D_{L(F)} = [b_1 + c_1 - 2]$.

Ejemplo 3.11. Sea G un grafo no conexo (compuesto por dos grafos regulares) con $D_G = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $v_G = \begin{bmatrix} 24 \\ 15 \end{bmatrix}$. Por otra parte, sea H otro grafo (también no conexo con

dos componentes bipartitas bi-regulares) con $D_H = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $v_H = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$. En-

tonces, $D_{L(G)} = D_{L(H)} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ y $v_{L(G)} = v_{L(H)} = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \end{bmatrix}$. Por lo que $L(G) \approx_f L(H)$ pero G y H no son isomorfos fraccionarios. Vemos que este ejemplo se construyó usando los ejemplos anteriores con distintas componentes conexas. En general, dado n , podremos construir grafos que sean la unión disjunta de n grafos regulares. Calculando sus grafos de línea (que tienen también n componentes conexas regulares), éstos pueden ser isomorfos fraccionarios a los grafos de línea de grafos con n componentes conexas bipartitas bi-regulares.

Ejemplo 3.12. (grafos con componentes conectadas entre sí, es decir, que no se construyen como los ejemplos anteriores). Sea G un grafo con $D_G = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ y $v_G = \begin{bmatrix} 60 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Por otra parte, sea H un grafo con $D_H = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ y $v_H = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix}$. Calculando

$D_{L(G)}$ y $D_{L(H)}$ nos queda que $D_{L(G)} = D_{L(H)} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$ y $v_{L(G)} = v_{L(H)} = \begin{bmatrix} 90 \\ 120 \end{bmatrix}$. Por lo que $L(G) \approx_f L(H)$ pero G no es isomorfo fraccionario a H .

Ejemplo 3.13. (dos grafos con la misma cantidad de vértices). Sean G y H dos grafos con $3n$ vértices cada uno y las siguientes matrices de componentes: $D_G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$v_G = \begin{bmatrix} n \\ n \\ n \end{bmatrix}$ y $D_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $v_H = \begin{bmatrix} n \\ n \\ \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} \end{bmatrix}$. Entonces, haciendo algunas cuentas,

queda que $D_{L(G)} = D_{L(H)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $v_{L(G)} = v_{L(H)} = \begin{bmatrix} n \\ n \\ n \end{bmatrix}$.

Vemos así que existen matrices D_L que pueden ser construidas a partir de diferentes grafos no isomorfos fraccionarios. Sería interesante caracterizar cuándo una matriz D_L es deconstruible (es decir, ver cuándo a partir de una D_L irreducible se puede llegar a una única D irreducible).

Ejemplo 3.14. Sea $D_L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. Veamos que D_L es deconstruible y calcule-

mos D . Inspeccionado la matriz D_L , vemos que las columnas 3 y 4 tienen 3 números

distintos de cero (y distintos entre sí) luego corresponden en D a conexiones entre

componentes regulares. Entonces $D = \begin{bmatrix} ? & 5 & 3 & ? \\ 2 & ? & ? & ? \\ 3 & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$. Además, las columnas y filas

1 y 2 corresponden a componentes regulares en D porque en la columna 4, fila 2 tenemos que $10 = 2b_{12}$ por lo que la columna 2 corresponde a una componente 4-regular y de la misma forma, como en la columna 3, fila 1 tenemos que $6 = 2b_{13}$

entonces la columna 1 corresponde a un 2-regular. Luego $D = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & ? \\ 2 & ? & ? & ? \\ 3 & ? & 2 & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$. Todos

los demás coeficientes son 0, puesto que ya usamos toda la información de la matriz

D_L . Entonces nos queda que $D = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 3.15. Sea $D_L = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ entonces vemos que si queremos decon-

struir D_L y obtener D podemos usar las columnas y filas 2, 3, 4 y 5 para ver que

$D = \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ de la misma forma que en el ejemplo anterior. Sin embargo, no

podemos conocer el valor de ? porque ya vimos que tanto un 4-regular como un (3,5)-regular bipartito nos daría el coeficiente 6 que se encuentra en la primera fila, primera columna de D_L . Así esta última D_L (que corresponde a un grafo de línea no conexo) no es deconstruible.

Capítulo 4

Invariantes fraccionarios

4.1. Cubrimiento y empaque de un hipergrafo

Un *cubrimiento* de un hipergrafo G dado es una familia de hiperaristas X_1, \dots, X_j de G tal que $V(G) \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_j$. El menor j para el cual esto es posible se llama *número de cubrimiento* de G y lo denotaremos $k(G)$. Un elemento $s \in v(G)$ está *aislado* si no está en ninguna hiperarista. En este caso, no existe un cubrimiento de G y diremos que $k(G) = \infty$. El problema de encontrar el mínimo j para el cual hay un cubrimiento de G se puede formular como un problema entero de minimización. Llamamos $x = (x_1, \dots, x_a)$ al vector de a coeficientes (a es la cantidad de hiperaristas de G) que toman los valores 0 ó 1, es decir x corresponde a una familia de hiperaristas. Si queremos que x sea un cubrimiento de G , debemos pedir que todos los vértices de G estén en alguna hiperarista de x . En notación matricial, nos queda que $M_G x \geq 1$ donde M_G es la matriz de incidencia vértice-hiperarista.

Luego, el problema entero de minimización para encontrar $k(G)$ es el siguiente: “Minimizar $k(G) = 1^t x$ sujeto a $M_G x \geq 1$ ” donde estamos suponiendo que los coeficientes de x sólo toman los valores 0 ó 1. Este problema entero se puede “relajar” para calcular un $k_f(G)$ (*número fraccionario de cubrimiento*) mediante el siguiente problema estándar de minimización: “Minimizar $k_f(G) = 1^t x$ sujeto a $M_G x \geq 1$ ” donde ahora estamos suponiendo solo que $x \geq 0$ (es decir, x puede tomar valores reales mayores a 0 y no sólo 0 ó 1). Si calculamos el x que hace mínimo a $k(G) = 1^t x$ con el primer problema de minimización, vemos que este x también cumple con el segundo (“relajado”) problema de minimización; es una posible solución factible aunque quizás no es la que hace el mínimo de $k_f(G)$. Luego, nos queda que $k(G) \geq k_f(G)$.

Por otra parte, un *empaque* de un hipergrafo G es un subconjunto de vértices $Y \subseteq V(G)$ con la propiedad de que dados dos elementos cualesquiera de Y no están en una misma hiperarista de G . El *número de empaque* $p(G)$ es la máxima cantidad de elementos que puede haber en un empaque. En ese sentido, llamamos $y = (y_1, \dots, y_v)$ al vector de coeficientes 0 ó 1 donde cada coeficiente corresponde a elegir o no un vértice de G (v es la cantidad de vértices de G). Luego, un empa-

que debe cumplir que $M_G^t y \leq 1$ donde nuevamente M_G es la matriz de incidencia vértice-hiperarista de G . El problema entero para maximizar $p(G)$ es el siguiente: “Maximizar $p(G) = 1^t y$ sujeto a $M_G^t y \leq 1$ ” donde estamos suponiendo que el vector y tiene todos sus coeficientes iguales a 0 ó 1. Nuevamente podemos “relajar” este problema para calcular un $p_f(G)$ (*número fraccionario de empaque*) mediante el siguiente problema estándar de maximización: “Maximizar $p_f(G) = 1^t y$ sujeto a $M_G^t y \leq 1$ ” donde suponemos ahora solamente que $y \geq 0$ (es decir que, y ya no toma los valores 0 ó 1 únicamente, puede tomar otros valores reales no negativos). De la misma forma que antes, el y que maximiza $p(G) = 1^t y$ en el primer problema de maximización, es una solución factible (pero quizás, no la que hace el máximo) del segundo problema “relajado” de maximización para calcular $p_f(G)$. Luego, nos queda que $p_f(G) \geq p(G)$.

Es sabido que los problemas estándar: “Maximizar $f = u^t y$ sujeto a $Ay \geq v$ con $y \geq 0$ ” y “Minimizar $g = v^t x$ sujeto a $A^t x \leq u$ con $x \geq 0$ ” son problemas duales de programación lineal. En particular, el máximo de f coincide con el mínimo de g (ver, por ejemplo, [1]). Utilizando este resultado para el número fraccionario de empaque y el número fraccionario de cubrimiento, nos queda que $p_f(G) = k_f(G)$. Entonces, nos queda que $p(G) \leq p_f(G) = k_f(G) \leq k(G)$.

En un grafo G sin vértices aislados (visto como hipergrafo 2-uniforme) podemos calcular el número de empaque $p(G)$ que coincidirá con el número máximo de vértices independientes $\alpha(G)$. De esta forma, podemos definir $\alpha_f(G) = p_f(G)$. Por otra parte, para el grafo G , $k(G)$ será el mínimo número de aristas a elegir que cubran todos los vértices (es evidente que $k(G) \geq \frac{v(G)}{2}$ porque cada arista cubre dos vértices).

Dado un grafo G podemos construir el hipergrafo H_G donde las hiperaristas de H_G son los conjuntos de vértices independientes de G . Dada A la matriz de adyacencia de G , podemos calcular M_{H_G} . Así, el número cromático de G coincide con el número de cubrimiento de H_G , es decir $\chi(G) = k(H_G)$. También podemos definir $\chi_f(G) = k_f(H_G)$ y se puede mostrar que esta definición es igual a otras formas de definir el *número cromático fraccionario* de G .

Dado un grafo G podemos construir el hipergrafo H'_G que tiene como vértices a las aristas de G y sus hiperaristas son el conjunto de aristas de G que inciden en un punto. Es decir, $H'_G = M_G^t$. El *número de apareamiento* de G , denotado por $\mu(G)$, es el máximo número de aristas de G disjuntas dos a dos. Así, el $\mu(G)$ es el número de empaque de H'_G . También podemos definir $\mu_f(G) = p_f(H'_G)$ y ver que esta definición coincide con otras formas de definir $\mu_f(G)$.

Es fácil ver que para el grafo de línea $L(G)$ de un grafo G dado, nos queda que $\mu(G) = \alpha(L(G))$. Sin embargo, no es cierto en el caso general que $\mu_f(G) = \alpha_f(L(G))$. Un ejemplo de esto puede verse con el grafo $K_{1,3}$, cuyo número de apareamiento fraccionario es 1, mientras que el número de empaque fraccionario de $L(K_{1,3}) = K_3$

es $3/2$ (dando un peso de $1/2$ a cada vértice).

4.1.1. El número fraccionario de cubrimiento y empaque para grafos isomorfos fraccionarios

Queremos ver ahora si existe alguna relación entre el $k_f(G)$ y el $k_f(H)$ donde G y H son hipergrafos isomorfos fraccionarios. (Es decir, existen S_1 y S_2 matrices doble estocásticas tales que $S_1 M_G = M_H S_2^t$ y $M_G S_2 = S_1^t M_H$). Para esto, planteamos los siguientes problemas estándar de minimización:

P1: “Minimizar $a = 1^t z$ sujeto a $M_H z \geq 1$ con $z \geq 0$ ”.

P2: “Minimizar $b = 1^t w$ sujeto a $S_1^t M_H w \geq 1$ con $w \geq 0$ ”.

P3: “Minimizar $c = 1^t u$ sujeto a $M_G S_2 u \geq 1$ con $u \geq 0$ ”.

P4: “Minimizar $d = 1^t v$ sujeto a $M_G v \geq 1$ con $v \geq 0$ ”.

Es fácil ver que P2 y P3 son el mismo problema dado que $S_1^t M_H = M_G S_2$, luego $b = c$. Por otra parte, $a \geq b$ porque los z de P1 son soluciones factibles de P2: si z es tal que $M_H z \geq 1$ entonces $S_1^t (M_H z) \geq S_1^t \cdot 1 = 1$ donde estamos usando que S_1 es doble estocástica. De la misma forma $c \geq d$ porque por cada solución u de P3 tenemos una solución factible v' de P4 con el mismo valor de función objetivo: si u es tal que $M_G S_2 u \geq 1$, luego llamando $v' = S_2 u$ nos queda que $M_G v' \geq 1$ y $1^t v' = 1^t S_2 u = 1^t u$. Luego queda que $a \geq b = c \geq d$. Pero $a = k_f(H)$ y $d = k_f(G)$, entonces $k_f(H) \geq k_f(G)$. Con la misma idea, calculando:

P5: “Minimizar $e = 1^t x$ sujeto a $S_1 M_G x \geq 1$ con $x \geq 0$ ”.

P6: “Minimizar $f = 1^t y$ sujeto a $M_H S_2^t y \geq 1$ con $y \geq 0$ ”.

obtenemos que $d \geq e = f \geq a$ y por lo tanto $k_f(G) \geq k_f(H)$. Luego, nos queda que $k_f(H) = k_f(G)$.

4.2. Aplicaciones al apareamiento fraccionario

Como ya vimos, un apareamiento en un grafo es un conjunto de aristas disjuntas dos a dos. El *número de apareamiento* $\mu(G)$ es el tamaño del apareamiento más grande. Un *apareamiento fraccionario* es una función f que asigna a cada arista del grafo un número en $[0, 1]$ de forma tal que para cada vértice v tenemos que $\sum f(e) \leq 1$ donde la suma es sobre todas las aristas incidentes en v . Si $f(e) \in \{0, 1\}$ para cada arista e , entonces f es simplemente un apareamiento. El *número de apareamiento fraccionario* $\mu_f(G)$ es el supremo de $\sum f(e)$ sobre todos los posibles apareamientos fraccionarios f . Se puede demostrar que este valor coincide con el visto antes

($\mu_f(G) = p_f(H'_G)$). Existen varios resultados conocidos que involucran a $\mu_f(G)$ y se encuentran compilados en [5]. Los detallaremos aquí:

- $\mu_f(G) \leq \frac{1}{2}v(G)$
- Si G es bipartito entonces $\mu_f(G) = \mu(G)$
- Para cualquier grafo G , $2\mu_f(G)$ es un entero. Mas aún, existe un apareamiento fraccionario f para el cual $\sum f(e) = \mu_f(G)$ con $f(e) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ para todas las aristas e .
- Si G es un grafo sin vértices aislados, entonces $k_f(G) + \mu_f(G) = v(G)$.
- Apareamiento fraccionario perfecto: Un grafo G tiene un *apareamiento fraccionario perfecto* cuando $\mu_f(G) = \frac{1}{2}v(G)$. Son equivalentes: i) G tiene un apareamiento fraccionario perfecto ii) existe una partición $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ del conjunto de vértices $V(G)$ tal que, para cada i , $G[V_i]$ es un K_2 o es un grafo hamiltoniano iii) existe una partición $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ del conjunto de vértices $V(G)$ tal que, para cada i , $G[V_i]$ es un K_2 o es un grafo hamiltoniano con una cantidad impar de vértices.
- Un grafo G tiene un apareamiento fraccionario perfecto si y sólo si $i(G-S) \leq |S|$ para todo conjunto $S \subseteq V(G)$ donde $i(G-S)$ es el número de vértices aislados del grafo $G-S$.

¿Qué se puede decir sobre los apareamientos fraccionarios de G y H si $G \approx_f H$? Ya vimos que en ese caso $k_f(G) = k_f(H)$ pero usando que $v(G) = v(H)$ y el resultado anterior nos queda que los números de apareamiento fraccionarios también coinciden: $\mu_f(G) = \mu_f(H)$. En particular, si G tiene un apareamiento fraccionario perfecto y H es isomorfo fraccionario a G entonces H también tiene un apareamiento fraccionario perfecto.

Si calculamos la matriz D_G y el vector v_G del grafo G , y la diagonal de D_G es distinta de 0, entonces G tiene un apareamiento fraccionario perfecto. Basta definir una función f sobre las aristas de G tal que $\sum f(e) = \frac{1}{2}v(G)$ (y $\sum f(e) \leq 1$ sobre cada vértice). Para ello, definimos $f(e) = \frac{1}{r_i}$ si e es una arista de la componente i r_i -regular y $f(e) = 0$ si e es una arista que une dos componentes regulares. Sumando, nos queda que cada componente con n_i vértices aporta a $\mu_f(G)$ un valor de $\frac{n_i}{2}$ puesto que $\frac{n_i r_i}{2} \cdot \frac{1}{r_i} = \frac{n_i}{2}$. Por lo tanto, en este caso, podemos particionar los vértices de G en V_1, V_2, \dots, V_k conjuntos de modo tal que los grafos inducidos $G[V_i]$ son K_2 o hamiltonianos con una cantidad impar de vértices.

Capítulo 5

Conclusiones

La complejidad computacional del problema de reconocimiento de isomorfismo de grafos es un problema abierto, por lo que es importante encontrar otros tipos de isomorfismos menos restrictivos que preserven el isomorfismo usual y que permitan decidir rápidamente si dos grafos pertenecen o no a una misma clase. De no pertenecer a una misma clase se deduciría que estos dos grafos tampoco son isomorfos en el sentido usual. Uno de estos isomorfismos menos restrictivos es el isomorfismo fraccionario de complejidad polinomial.

El isomorfismo fraccionario resulta de "relajar" el isomorfismo de grafos: en vez de pedir la relación $AP = PB$ (A, B matrices de adyacencia de G y H y P una matriz de permutación) decimos que G y H son isomorfos fraccionarios si $AS = SB$ donde S es una matriz doble estocástica. Dado que las matrices de permutación son también doble estocásticas, se deduce que este nuevo isomorfismo preserva el usual.

En este trabajo, siguiendo el capítulo 6 del libro *Fractional Graph Theory - A rational approach to the theory of graphs* de E.R. Scheinermann y D.H. Ullman, mostramos que el isomorfismo fraccionario puede caracterizarse completamente. El teorema principal del isomorfismo fraccionario nos da dos caracterizaciones equivalentes: el de las particiones equitativas y el de las secuencias de grados. Es evidente que los vértices de cualquier grafo pueden ser divididos en partes donde cada una de ellas es un subgrafo inducido regular y donde para dos partes cualesquiera el subgrafo inducido por las aristas que unen estas dos partes es bipartito, basta tomar cada vértice como una de estas partes. Una división así se llama partición equitativa y para cualquier grafo se pueden calcular los parámetros correspondientes a la partición equitativa más gruesa, es decir aquella que tenga la menor cantidad de partes. El teorema principal demuestra que dos grafos son isomorfos fraccionarios si los parámetros de estos dos grafos son los mismos. Así, en el capítulo 1 de este trabajo, mostramos los principales resultados sobre el isomorfismo fraccionario conocidos hasta la fecha. Estos resultados, de los cuales el principal es la caracterización de los grafos isomorfos fraccionarios, se deducen utilizando algunas herramientas del álgebra lineal como el teorema de Perron-Frobenius para matrices positivas y la descomposición de Birkhoff de las matrices doble estocásticas. Este primer capítulo sirve de introducción para comprender el "estado del arte" respecto al isomorfismo

fraccionario.

Por otra parte, el libro *Fractional Graph Theory - A rational approach to the theory of graphs*, en sus diferentes capítulos, está dedicado, justamente, a exponer muchos de los resultados de la teoría fraccionaria de grafos, donde por teoría fraccionaria de grafos se entiende aquellos resultados de la teoría de grafos que pueden ser relajados para obtener análogos fraccionarios. Un ejemplo claro es el del número cromático que puede extenderse a un número cromático fraccionario. Sin embargo, en el capítulo 6 del mencionado libro, dedicado al isomorfismo fraccionario, no se relaciona este isomorfismo con otros resultados del libro, como por ejemplo el del número cromático fraccionario. Una pregunta interesante que este trabajo trató de responder es si existen algunos números fraccionarios conocidos invariantes por el isomorfismo fraccionario. La respuesta es que sí, el número fraccionario de empaque y el número fraccionario de cubrimiento son invariantes por el isomorfismo fraccionario.

Para calcular estos invariantes se necesita de las herramientas de la programación lineal y para trabajar con la programación lineal los grafos deben ser descritos no por sus matrices de adyacencia sino por sus matrices de incidencia vértice-arista. Entonces, resultó natural preguntarse cómo se describe el isomorfismo fraccionario si en vez de tener las matrices de adyacencia de G y H (donde $G \approx_f H$) tenemos sus matrices de incidencia vértice-arista. En este trabajo, obtuvimos que $AS = SB$ ($G \approx_f H$) \Leftrightarrow existen S_1 y S_2 doble estocásticas tales que $S_1 M_G = M_H S_2^t$ y $M_G S_2 = S_1^t M_H$ donde A y B son las matrices de adyacencia de G y H respectivamente y M_G y M_H son las matrices de incidencia vértice-arista de G y H . A partir de este resultado, también, pudimos extender la noción de isomorfismo fraccionario a hipergrafos. En particular, el capítulo 2 de esta tesis estuvo dedicado a mostrar cómo se puede extender el isomorfismo fraccionario de grafos a hipergrafos. Así, en el capítulo 4, ya teniendo los resultados del capítulo 2, pudimos demostrar, utilizando la programación lineal, que los números fraccionarios de empaque y cubrimiento son invariantes por el isomorfismo fraccionario. Y utilizamos este resultado para sacar algunas conclusiones sobre el apareamiento fraccionario de dos grafos isomorfos fraccionarios.

En cambio, el capítulo 3 de este trabajo trató de buscar algunos resultados sobre los grafos de línea de dos grafos isomorfos fraccionarios dados. Es evidente que dos grafos isomorfos tienen grafos de línea isomorfos; sin embargo, su análogo fraccionario no es tan obvio. Pero, pensando que a partir de la matriz de parámetros (que se calcula de la partición equitativa más gruesa) de un grafo se obtiene unívocamente la matriz de parámetros de su grafo de línea, resulta que si dos grafos tienen los mismos parámetros (y por tanto, son isomorfos fraccionarios) entonces los parámetros de sus grafos de línea coinciden (y por lo tanto, los grafos de línea son isomorfos fraccionarios). El teorema de Whitney dice que si dos grafos de línea son isomorfos entonces los grafos originales son también isomorfos salvo un único caso particular. Sería interesante encontrar un análogo fraccionario a este teorema. Por una parte, el análogo fraccionario del teorema de Whitney es falso en su versión más general. En el capítulo 3 del trabajo se muestran numerosos contraejemplos. Estos contraejemplos, se construyen todos a partir de matrices de parámetros que tienen en su

diagonal por lo menos un cero. Es por eso que conjeturamos que si dos grafos de línea son isomorfos fraccionarios entonces los grafos originales son isomorfos fraccionarios siempre y cuando sepamos que las matrices de parámetros de estos grafos no tienen ceros en la diagonal.

Existen diversas líneas de trabajo futuro. Una de ellas es lograr demostrar el análogo al teorema de Whitney para grafos isomorfos fraccionarios, con las restricciones adecuadas, como ya explicamos. Uno de los impedimentos para llevar a cabo la tarea fue la falta de una forma sencilla de calcular la matriz de parámetros del grafo de línea a partir de la matriz de parámetros del grafo original. Sin embargo, existe una solución a este problema usando una notación diferente para estas matrices de parámetros (muy parecidas a las ideas desarrolladas en el capítulo de hipergrafos). Otro de los problemas que obtaculizaron la obtención de este resultado es que es difícil caracterizar cuándo una matriz de parámetros de un grafo de línea corresponde a la partición más gruesa del grafo de línea (que es lo que llamamos reducibilidad de las particiones o reducibilidad de la matriz de parámetros). Pero, creemos que utilizando esta nueva notación matricial para los parámetros se puede calcular con mayor facilidad si una matriz de parámetros es reducible o no a una partición más gruesa. Otra línea de trabajo futuro es continuar analizando los resultados que se obtienen de la extensión del isomorfismo fraccionario a hipergrafos y cuáles otros invariantes fraccionarios también son invariantes en el isomorfismo fraccionario.

Bibliografía

- [1] V. Chvátal. *Linear Programming*. Freeman and Company, San Francisco, 1983.
- [2] F. Harari. *Graph Theory*. Addison–Wesley, 1969.
- [3] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990.
- [4] L. Khachian. A polynomial algorithm in linear programming. *Soviet Mathematics Doklady*, 20:191–194, 1979.
- [5] L. Lovász and M.D. Plummer. *Matching Theory*. North-Holland, 1986.
- [6] D. Ullman and E. Scheinerman. *Fractional Graph Theory – A Rational Approach to the Theory of Graphs*. Wiley, 1997.
- [7] D. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2nd edition, 2000.
- [8] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *American Journal of Mathematics*, 54:150–168, 1932.